秋田県立大学総合科学研究彙報　第22号（2021）：７－21

微分方程式と次元解析をテーマとした物理の高大接続授業Ⅰ

宮　本　雲　平

1　はじめに

高校物理と大学物理のギャップはとても大きい．その主な理由は——微分積分が惑星運動の記述のために開発された言語であることから明らかなように [1]——物理学が本質的に微分積分と切っても切り離せない学問であるにも関わらず，高校物理では微分積分の使用が極端に制限されていることにある [2]．高校物理・入試物理では公式を暗記して使いこなす能力が重視されがちである．そこでは数学が本質的な役割を果たさない．

しかし，大人の事情（教育課程・入試制度上の制限・配慮）の為に直隠しにされてきた物理と数学の密接な関係は，大学入学と同時に青少年の前に暴露される．あっという間に物理学の授業は数式に埋もれ，物理好きだった青少年も哀れ，時を待たずして落ちこぼれいくことも多い．

このような事態は，1997年に高校数学の微分積分（現在の「数学III」[3]）から微分方程式 [4] の単元が削除されてから顕在化したのではなかろうか．変数分離型など，ごく初歩的な常微分方程式の解法さえ知っていれば，大学初年次における物理学の授業（つまり古典力学 [5]）で大きく戸惑うことはない．しかし，全く微分方程式の概念を知らない場合，そこで躓く可能性は高まる．かといって，多くの大学では物理学の授業で微分方程式を丁寧に講義する時間は確保できないだろう．すると，微分方程式の解き方を——最悪の場合には微分方程式というものがこの世に存在することさえ——知らないまま初学年の教養物理・教養数学（「微分積分」「線形代数」「確率統計」）の授業を終え，2・3年生になって「常微分方程式」「応用数学」「工業数学」などの科目で，生まれて初めて微分方程式に触れるという大惨事も起こり得るのである．

この問題は見方によってはかなり深刻と言えるが，ここではこれ以上犯人捜しのような真似はしない．その代わり，状況を少しでも改善出来るかも知れない筆者のささやかな活動の内容を報告する．

筆者は，2015年より年に数回,「ハイレベル数学講座：数学で解く物理の世界」という高校生向けの高大接続授業（90分 ×3回程度）を行っている．この授業は高校3年生を主な対象とし,「運動方程式は数学的には微分方程式というもので，それを解ければ，物理の勉強は暗記から解放される」ということを理解してもらっている．

受講生は秋田県内の様々な高校から集まるが，多くの受講生から良い評価を得ている．実際，筆者の同業者（理論物理学者）には，高校の物理の先生が微分積分を使った物理を課外授業で教えてくれたのが切っ掛けで物理の面白さに目覚め，物理学者を目指したという人が複数いる．このことからもわかるように，あるクラスの高校生（大学新入生）にとっ

て，微分積分を使った「本物の物理」を学ぶことは，非常に刺激的・魅力的な体験なのである．

ハイレベル数学講座の受講生への配付資料に大幅な加筆修正をしたものが本稿（とその続編 [6]）である．その内容と形式は，筆者が長年温め実践してきた，物理学における高大接続授業の在り方に関する理想——もしくは高校物理の在り方に対するささやかな抵抗——を具現化したものである．また，その理想が机上の空論で終わるか否かを試す実験の試料でもある．

本稿は，高校で力学と微分積分を（部分的にでも）学んだことがあるにも関わらず両者の関係を知らない者が，微分積分を用いて力学の問題を解いたり，自分で公式を導出できるようになるよう設計されている．ブラックボックスを極力排除し，高校数学だけで理解できるよう工夫されており，演習問題とその詳解も掲載されている．高大接続授業や大学初年次の授業で（独学でも）広く活用して頂き，様々なご意見・アドバイスを頂きたい．

ハイレベル講座において時間に余裕がある場合は，次元解析 [7] に関する講義も含めるようにしている．次元解析は高校 1 年生にも理解できる数学（指数法則）しか使わないにも関わらず，自然科学で広範に使える非常に強力な手法である．次元解析にはそれを身に付けるだけで数理的センスが向上したり，大幅な記憶の節約ができるという魔法のような側面をもつが，次元解析（とは言わないまでもそれに近い考え方）を知っている高校生は皆無に等しい．更に悪いことに，大学に入学してからは何故か既知のこと（自然に身に付けるべきもの）として扱われることが多いため，物理学・流体工学・機械工学などを専門とする者以外は，次元解析について知らずに大学を卒業していくことも多いようである．

本稿の構成は次のようになっている．まず，第 2 節で微分方程式とは何かを解説し，物理学におけるその役割を概観する．次に，第 3 節において微分方程式の基礎を学ぶ．第 4 節では，第 3 節で学んだ知識を用いて，3 つの代表的な運動（等加速度運動・速度に比例する抵抗力・ばね振り子）に対する運動方程式を解く．更に，第 5 節では運動方程式を積分することで種々の保存則が導かれることを見る．第 6 節でまとめを行う．

なお，誌面の都合上，次元解析に関する内容，および，力学以外の分野における微分方程式の役割に関する内容は本稿に収めることができなかった．それらについては本稿の続編 [6] にて紹介したい．

2　微分方程式の役割

本稿では高校数学の範囲で，微分方程式という物理に（化学・生物にも）役立つ数学を紹介する．主な目的は次のようなものである．

(a) 物理は公式の暗記ではないことを理解する．

(b) 「数学 III」（微分積分）を学ぶモチベーションを高める．

(c) 受験に役立てる．

2.1　数学と物理

数学と物理の関係について簡単に述べたい．物理学の営みとは次のようなものである．

(a) 現象を観測し，背後に潜む法則（運動方程式）を抽出する．

(b) 運動方程式を解いて現実と比較し，法則の正否を検証する．

(c) 運動方程式を解いて未知の現象を予言する．

重要なことは,「現象を観測」「現実と比較」するところは物理的作業であるが，しばしば最も時間・労力がかかるところの「運動方程式を解いて」というところは，本質的に数学である．誤解を恐れずに言えば「物理は殆ど数学」なのである．

2.2 運動方程式の数学的意味

運動方程式（equation of motion）は，数学的には微分方程式（differential equation）と呼ばれるものである [4].

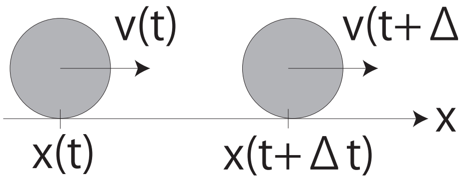

図 1: 速度は位置の瞬間変化率 (1)，加速度は速度の瞬間変化率 (2) として定義される．

物理では，適当な座標 x を導入し，時刻 t における質点の位置を時間の関数 $x = x(t)$ として表す（図 1）．時刻 t における質点の速度は時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ における平均の速度の $\Delta t \to 0$ 極限として定義される．

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

時間微分は $x'(t)$（ダッシュ）ではなく $\dot{x}(t)$（ドット）と書く慣習がある．また，時刻 t における質点の加速度は時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ における平均の加速度の $\Delta t \to 0$ 極限として定義される．

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

ニュートンは，質点の加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ が質点に働く力 F に比例することを発見した [5].

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F \tag{3}$$

例えば，地表付近では下向きに一様重力が働くので，$F = -mg$ とかける．すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \tag{4}$$

と書ける．運動方程式 (4) を解くということは，関数の 2 階微分 $\frac{d^2x}{dt^2}$ から元の関数 $x(t)$ を見つけるという作業に他ならない．このような方程式を数学的には微分方程式と呼ぶ．

運動方程式を微分方程式と捉えると，次のようなメリットがある．

(a) 公式を自分で導けるので，暗記から解放される．

(b) 運動方程式を中心として，分野全体を見渡すことができる．

(c) 公式の導き方を理解できるので，公式の使い方を間違えない．

微分方程式は「数学 III」の範囲で十分に理解できる（本稿は「数学 III」の知識で全て理解可能）が，現在高校では教えられていない [3]．また，高校物理は微分積分を使って教えてはいけないことになっている．

3 微分方程式入門

3.1 微分方程式とは

次のような 2 次関数を考える．

$$y(x) = x^2 \tag{5}$$

微分すると

$$y' = 2x \tag{6}$$

が得られる．

ここでは，始めに (6) が与えられたとして，そこから (5) を再現できるかという問題を考えよう．(6) のように未知の関数の微分を含むような方程式を微分方程式（differential equation）という．微分方程式を満たす $y(x)$ のことを解（solution）という．微分方程式から未知関数 $y(x)$ を求めることを，「微分方程式を解く，解を見つける，積分する」などと言う．

(6) の解は目で見つけることができる．あきらかに

$$y = x^2 \tag{7}$$

は (6) の解である[1]．また，定数は微分したらゼロだから (7) に任意定数 C を足した

$$y = x^2 + C \tag{8}$$

も解である．でもこれは，元の関数 (5) よりも一般的である．言い換えると，(5) と (6) が同等になるには，(6) にもう 1 つ条件が必要になる．例えば，(5) は点 $(0,0)$ を通るから (6) に $y(0) = 0$ という条件を加えればよい．すると

$$y(0) = 0^2 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 0 \tag{9}$$

と C が決定される．

つまり，次のような同値関係が得られる

$$y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = 2x, \quad y(0) = 0 \tag{10}$$

$y(0) = 0$ のような条件を初期条件（initial condition）という（図 2）．

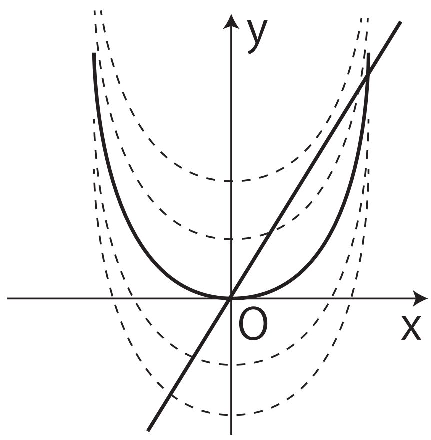

図 2: 点 x における接線の傾きが $2x$ で与えられる曲線 $y = x^2 + C$（放物線群）は無数にある．初期条件 $y(0) = 0$ を課すと，そのうちの **1** つ $y = x^2$（原点を通る放物線）が選ばれる．

第 3.2 節–第 3.4 節で，3 つの典型的な微分方程式の解き方を学ぶことにする．

3.2　$y'' = a$ 型

次の微分方程式を考える．

$$y''(x) = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \tag{11}$$

このように，求める関数の 2 階微分を含むような微分方程式を 2 階微分方程式（differential equation of the second order）という．(6) は 1 階微分方程式（differential equation of the first order）である．2 階微分方程式には初期条件が 2 つ必要であり，解くには微分方程式を 2 回積分すればよい．

(11) の両辺を $x = 0$ から任意の点 x まで積分すると

$$\int_0^x y'' dx = \int_0^x 1 dx \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad [y'(x)]_0^x &= y'(x) - y'(0) \\ &= y'(x) - 1 = [x]_0^x = x \end{aligned} \tag{13}$$

よって

$$y'(x) = x + 1 \tag{14}$$

両辺をもう一度 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x y' dx = \int_0^x (x+1) dx \tag{15}$$

両辺はそれぞれ

$$\int_0^x y' dx = [y(x)]_0^x = y(x) - y(0) = y(x) - 1 \tag{16}$$

$$\int_0^x (x+1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2 + x \tag{17}$$

となる．両辺を等しいとおいて

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \tag{18}$$

3.3 $y' = ay$ 型

これまでは微分方程式の右辺が x の既知関数だったが，今回は右辺も未知の関数 y を含んでいる次のようなものを考える．

$$y' = -y, \quad y(0) = 1 \tag{19}$$

この場合，先ほどのように両辺を単純に積分するわけにはいかない（右辺も未知だから）．そこで，$y(x) \neq 0$ として，(19) の両辺を y で割ってみよう

$$\frac{y'}{y} = -1 \tag{20}$$

合成関数の微分法 [2] を用いると，この式は次のように書き換えることができる

$$(\log y)' = -1 \tag{21}$$

この式の両辺を積分すれば

$$\int_0^x (\log y)' dx = [\log y(x)]_0^x$$
$$= \log y(x) - \log y(0) = \log \frac{y(x)}{y(0)} \tag{22}$$

$$\int_0^x (-1) dx = [-x]_0^x = -x \tag{23}$$

ここで対数法則 [3] を用いた．したがって

$$y(x) = y(0)e^{-x} = e^{-x} \tag{24}$$

と解を得ることができる（図 3）．

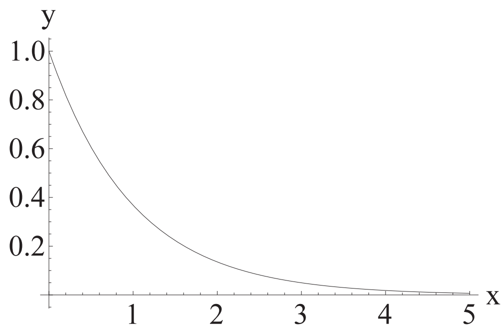

図 3: 微分方程式 (19) の解 (24) のグラフ．

3.4 $y'' = -a^2 y$ 型

2 階微分が自分自身の符号を変えたものになるような関数の微分方程式を考えよう．

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{25}$$

先ほどのように両辺を y で割っても上手くいかないので，他の方法が必要である．

実際には機械的にできるよい解法があるが，少し準備を要するので，ここでは発見的な方法で解を見つけよう [4]．

2 回微分すると符号を反転するだけで自分自身に戻る関数を我々は 2 つ知っている．$\cos x$ と $\sin x$ である．

$$(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x \tag{26}$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x \tag{27}$$

この 2 つの式に任意の定数 A, B を掛けて加えることで

$$(A\cos x + B\sin x)'' = -(A\cos x + B\sin x) \quad (28)$$

を得る．つまり，$y = A\cos x + B\sin x$ は $y'' = -y$ の解である．さらに，任意定数を 2 つ含んでいるため，2 つの初期条件を満たすことも可能である．実際

$$y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \quad (29)$$

$$y'(0) = -A\sin 0 + B\cos 0 = 1 \quad (30)$$

より

$$A = 0, \quad B = 1 \quad (31)$$

とすれば初期条件が満たされることがわかる．

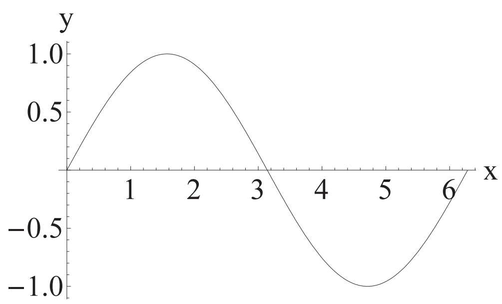

図 4: 微分方程式 (25) の解 (32) のグラフ．

以上より，(25) の解は

$$y = \sin x \quad (32)$$

である（図 4）．

本節で学んだ微分方程式の型と解き方を表 1 にまとめた．

表 1: 代表的な微分方程式の型と解き方．A, B は初期条件から決まる定数．

型	解き方	解
$y'' = a$	両辺を 2 回積分	$y = A + Bx + \frac{1}{2}ax^2$
$y' = ay$	$\frac{y'}{y} = a$ として両辺を積分	$y = Ae^{ax}$
$y'' = -a^2 y$	$(\cos ax)'' = -a^2\cos ax$ などを利用	$y = A\cos ax + B\sin ax$

3.5 演習問題

問題 3.1
$y'' = -2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ を解け．
【解答】
$y = -x^2$ □

問題 3.2
$y' = -2y,\ y(0) = -1$ を解け．
【解答】
$y = -e^{-2x}$ □

問題 3.3
$y'' = -y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を解け．
【解答】
$y = \cos x$ □

4 微分方程式としての運動方程式

高校物理に出てくる運動方程式を微分方程式として書き下し，前節で学習した解き方を適用してみよう．

4.1 等加速度運動：$m\ddot{x} = F =$ 一定

質量 m の質点を地上から鉛直上向きに初速 v_0 で投げたときの運動を求めてみよう（図 5）．

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -mg, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (33)$$

であり，$y'' = a$ 型の微分方程式である．よって，$\ddot{x} = -g$ の両辺を時刻 $t = 0$ から任意時刻 t まで積分すれば

$$\int_0^t (\dot{x})^{\cdot} dt = [\dot{x}(t)]_0^t = \dot{x}(t) - \dot{x}(0) \tag{34}$$

$$\int_0^t (-g) dt = [-gt]_0^t = -gt \tag{35}$$

よって

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) - gt = v_0 - gt \tag{36}$$

を得る．両辺をもう一度積分すると

$$\int_0^t \dot{x} dt = [x(t)]_0^t = x(t) - x(0) \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t (v_0 - gt) dt &= \left[v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right]_0^t \\ &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\end{aligned} \tag{38}$$

となり

$$x(t) = x(0) + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{39}$$

を得る．運動方程式を 2 回時間積分することで解が得られた．

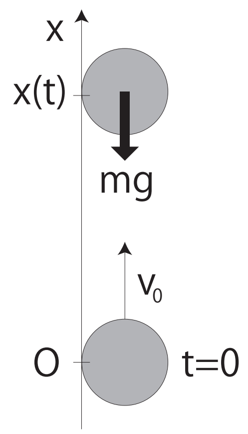

図 5: 運動方程式 (33) が表す状況．

一般の等加速度運動に関する速度と距離に関する公式の導出を問題 4.2 として載せたが，上のように運動方程式を微分方程式として捉えれば公式を暗記する必要はない．

4.2 速度に比例する抵抗力：$m\ddot{x} = -k\dot{x}$

質量 m の質点が速さに比例する抵抗力（比例係数 k）を受けながら運動するときの速度の時間変化を求めよう．初速を v_0 とする（図 6）．

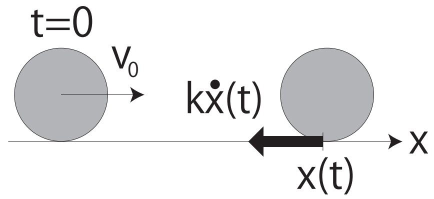

図 6: 運動方程式 (40) が表す状況．

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{40}$$

$v = \dot{x}$ を用いれば

$$m\dot{v} = -kv \tag{41}$$

となり，$y' = ay$ 型の微分方程式に帰着される．よって，両辺を $v(\neq 0)$ で割れば

$$\frac{\dot{v}}{v} = -\frac{k}{m} \quad \Longrightarrow \quad (\log v)^{\cdot} = -\frac{k}{m} \tag{42}$$

両辺を時刻 0 から任意の時刻 t まで積分すれば

$$\begin{aligned}\int_0^t (\log v)^{\cdot} dt &= [\log v(t)]_0^t \\ &= \log v(t) - \log v(0) = \log \frac{v(t)}{v(0)}\end{aligned} \tag{43}$$

$$\int_0^t \left(-\frac{k}{m} \right) dt = \left[-\frac{k}{m} t \right]_0^t = -\frac{k}{m} t \tag{44}$$

両辺を等しいとして，指数をとると

$$\frac{v(t)}{v(0)} = e^{-\frac{k}{m}t} \quad \Longrightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \tag{45}$$

4.3　ばね振り子：$m\ddot{x} = -kx$

おもりの質量が m，ばね定数が k のばね振り子を考える．時刻 t における自然長からの伸びを $x(t)$ とし，$t = 0$ で $x = x_0$ で静かに手を離したとしよう（図 7）．

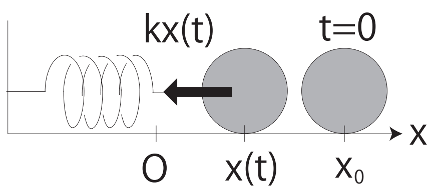

図 **7:** 運動方程式 (46) が表す状況．

運動方程式を立てると

$$m\ddot{x} = -kx, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{46}$$

となるが，これは次のように書き換えることができる．

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{47}$$

これは $y'' = -a^2 y$ 型の微分方程式である．よって，2 つの解は $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ となり [5]，解は次のように書ける．

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{48}$$

A, B は初期条件から決まる定数である．微分すると

$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \tag{49}$$

初期条件より

$$A\cos 0 + B\sin 0 = x_0 \tag{50}$$

$$-\omega A\sin 0 + \omega B\cos 0 = 0 \tag{51}$$

これらを解いて

$$A = x_0, \; B = 0 \tag{52}$$

したがって，おもりは次のように振動する [6]．

$$x(t) = x_0\cos\omega t = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{53}$$

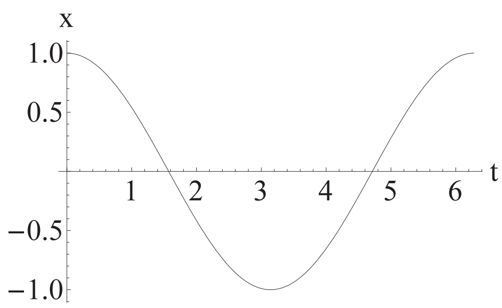

図 **8:** 運動方程式 (46) の解 (53) のグラフ．

表 **2:** 代表的な運動方程式（$m\ddot{x} = F$）の解き方．

運動	解き方	解
等加速度運動（$F =$ 一定）	$\alpha = \frac{F}{m} \;\Rightarrow\; y'' = a$ 型	$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
制動（$F = -k\dot{x}$）	$v = \dot{x} \;\Rightarrow\; y' = ay$ 型	$v(t) = v(0)e^{-\frac{k}{m}t}$
ばね振り子（$F = -kx$）	$\omega^2 = \frac{k}{m} \;\Rightarrow\; y'' = -a^2 y$ 型	$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$

4.4　演習問題

問題 4.1
微分方程式 (11)，(19)，(25) を運動方程式とみなすと，それぞれどのような運動に対応しているか述べよ．
【解答】
(11) は，加速度・初速度・初期位置が 1 の等速直線運動に対応している．(19) は速度に比例する抵抗力が働き，初速度が 1 の質点の運動に対応している．(25) は初期位置が 0 で，初速度が 1 であるばね振り子の運動に対応している．　□

問題 4.2
等加速度運動（加速度 α）の時刻 t における速度と変位に関する次の公式を運動方程式から導け．

$$v = v_0 + \alpha t \tag{54}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{55}$$

【解答】

運動方程式 $m\ddot{x}=F$ において $\alpha=\frac{F}{m}$ とおき，$\ddot{x}=\alpha$ の両辺を時刻 0 から任意の時刻 t まで積分すれば

$$\int_0^t \ddot{x}dt=[\dot{x}]_0^t=\dot{x}(t)-\dot{x}(0) \tag{56}$$

$$\int_0^t \alpha dt=[\alpha t]_0^t=\alpha t \tag{57}$$

よって，$v=\dot{x}(t), v_0=\dot{x}(t_0)$ とおけば (54) を得る．

さらに両辺をもう一度時刻 0 から任意の時刻 t まで積分する

$$\int_0^t \dot{x}dt=[x(t)]_0^t=x(t)-x(0) \tag{58}$$

$$\int_0^t (v_0+\alpha t)dt=\left[v_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2\right]_0^t$$
$$=v_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{59}$$

したがって，(55) は運動方程式を 2 回積分したものとして得られる． □

問題 4.3
質量 m の質点を地上から初速 v_0 で水平方向からの角度 θ で投げたときの運動を求めよ．
【解答】

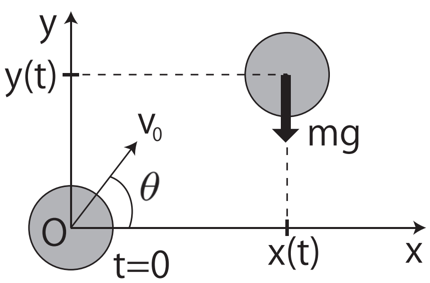

図 9: 運動方程式 (60)(61) が表す状況．

図 9 を参照しながら運動方程式は

$$m\ddot{x}(t)=0,\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=v_0\cos\theta \tag{60}$$

$$m\ddot{y}(t)=-mg,\quad y(0)=0,\quad \dot{y}(0)=v_0\sin\theta \tag{61}$$

$\ddot{x}=0$ を時刻 0 から t まで積分して

$$\dot{x}(t)-\dot{x}(0)=\int_0^t 0dt=0$$
$$\Longrightarrow\quad \dot{x}(t)=\dot{x}(0)=v_0\cos\theta \tag{62}$$

もう一度時刻 0 から t まで積分すると

$$x(t)-x(0)=\int_0^t v_0\cos\theta dt=v_0\cos\theta\cdot t$$
$$\Longrightarrow\quad x(t)=v_0\cos\theta\cdot t \tag{63}$$

$\ddot{y}=-g$ を時刻 0 から t まで積分して

$$\dot{y}(t)-\dot{y}(0)=\int_0^t(-g)dt=-gt$$
$$\Longrightarrow\quad \dot{y}(t)=\dot{y}(0)-gt=v_0\sin\theta_0-gt \tag{64}$$

もう一度時刻 0 から t まで積分すると

$$y(t)-y(0)=\int_0^t(v_0\sin\theta_0-gt)dt$$
$$=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{65}$$

$$\Longrightarrow\quad y(t)=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{66}$$

(63) と (66) から t を消去すれば，放物線が得られる．
□

問題 4.4
質量 m の質点を上空から初速ゼロで落下させる．質点が速さに比例する抵抗と重力を受けながら運動するとき，速度の時間変化を求めよ．
【解答】

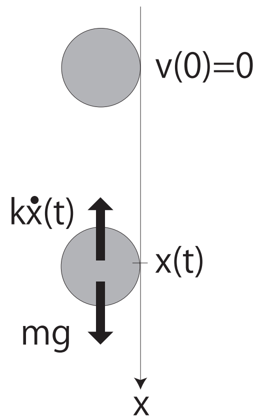

図 10: 運動方程式 (67) が表す状況．

鉛直下向きに x 軸をとり，図 10 を参照しながら運動方程式を立てると

$$m\ddot{x}=mg-k\dot{x},\quad \dot{x}(0)=0 \tag{67}$$

ただし，k は抵抗力の比例定数である．$v=\dot{x}$ であることを考慮して，この運動方程式を書き換えると

$$\dot{v}=g-\frac{k}{m}v=-\frac{k}{m}\left(v-\frac{mg}{k}\right) \tag{68}$$

とかける．さらに変形すると

$$\frac{\dot{v}}{v-mg/k}=(\log(v-mg/k))^{\cdot}=-\frac{k}{m} \tag{69}$$

この式を時刻 0 から任意の時刻 t まで積分すると

$$\int_0^t (\log(v - mg/k))^{\cdot} dt = [\log(v - mg/k)]_0^t$$
$$= \log \frac{v(t) - mg/k}{v(0) - mg/k} \tag{70}$$
$$\int_0^t \left(-\frac{k}{m}\right) dt = \left[-\frac{k}{m}t\right]_0^t = -\frac{k}{m}t \tag{71}$$

よって，$v(0) = 0$ も考慮して

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \tag{72}$$

解 (72) のグラフは図 11 のようになる．$t \to +\infty$ における速度 mg/k は終端速度と言われる． □

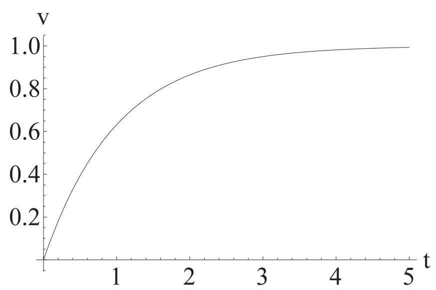

図 11: 運動方程式 (67) の解 (72) のグラフ.

問題 4.5
おもりの質量が m，ひもの長さが ℓ の単振り子を，時刻 $t = 0$ に最低点から水平方向に速さ v_0 で放したときの運動を求めよ．
【解答】

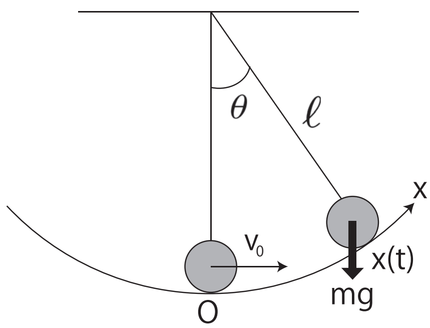

図 12: 運動方程式 (73) が表す状況.

時刻 t における，おもりの位置を最下点から円弧に沿って $x(t)$ とし，ひもの鉛直下向きからの傾きを $\theta(t)$ とおく（図 12）．運動方程式を立てると

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta,\ \ x(0) = 0,\ \ \dot{x}(0) = v_0 \tag{73}$$

となるが，角度は微小（$|\theta| \ll 1$）だとすると次のように近似できる．

$$\sin\theta \simeq \theta = \frac{x}{\ell} \tag{74}$$

これを代入すると運動方程式は次のようになる．

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{75}$$

これは $y'' = -a^2 y$ 型の微分方程式である．よって，2 つの解は $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ となり，解は次のように書ける．

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{76}$$

A, B は初期条件から決まる定数である．微分すると

$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \tag{77}$$

初期条件より

$$A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \tag{78}$$
$$-\omega A\sin 0 + \omega B\cos 0 = v_0 \tag{79}$$

これらを解いて

$$A = 0,\ B = \frac{v_0}{\omega} \tag{80}$$

したがって，振り子は次のように振動する（図 13）[7]．

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}v_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \tag{81}$$

□

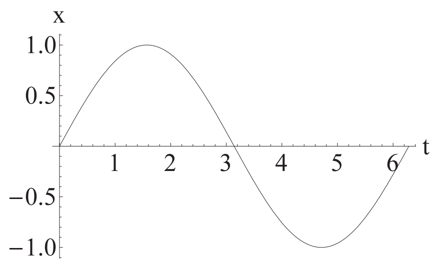

図 13: 運動方程式 (73) の解 (81) のグラフ.

5　保存則の導出

5.1　保存則を用いる問題

次の例題は，高校物理の教科書にも載っている典型的な問題である．

例題 5.1
質量 M の物体を糸でつるし，質量 m の弾丸を水平方向に速さ v_0 で正面衝突させる．両者は一体となって動き出し，ある高さまで上昇した（図 14）．

(a) 両者が一体となった直後の速さはいくらか．

(b) 衝突前の高さを基準にすると，両者が達する到達点はいくらか．

【解答】

(a) 運動量保存の法則を用いて解く．衝突後の速さを v とおくと

$$
\begin{aligned}
mv_0 &= (m+M)v \\
\Longrightarrow \quad v &= \frac{m}{m+M}v_0
\end{aligned}
\tag{82}
$$

(b) 衝突直後と最高点に達したところでの力学的エネルギーが等しいことを用いて解く．最高点の高さを h とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2 &= (m+M)gh \\
\Longrightarrow \quad h &= \frac{m^2 v_0^2}{2g(m+M)^2}
\end{aligned}
\tag{83}
$$

□

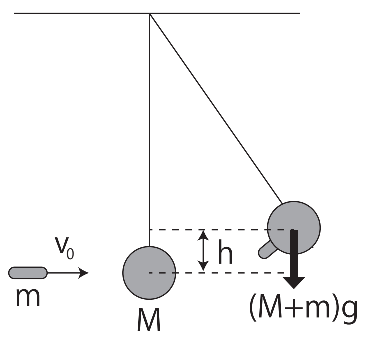

図 14: 単振り子に弾丸が打ち込まれる問題.

このような2体問題や保存力（重力やバネ力など）の下での運動を扱う場合，質点の位置を時間の関数 $x(t)$ として知る必要がなく，運動量保存則やエネルギー保存則から必要な情報（衝突後の速度や到達した高さ）を得れば十分なことが多い．

高校物理では運動方程式と，運動量保存則やエネルギー保存則の関係がわかりにくいが，ここでは種々の保存則は単なる運動方程式の積分形であることを見る．

5.2 運動量と力積：$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt$

運動方程式 $m\ddot{x}(t) = F$（図 15）を時刻 t_1 から t_2 まで積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}dt = [m\dot{x}]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} F dt \tag{84}$$

よって,「運動量の変化は外力が与えた力積に等しい」

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt \tag{85}$$

という公式が導かれる．

もし，F = 一定 であったり，時刻間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ が短いため，その間に F = 一定と見なせるならば，F は積分の外に出せて

$$mv_2 - mv_1 = F\Delta t \tag{86}$$

という高校の教科書でお馴染みの形になる．

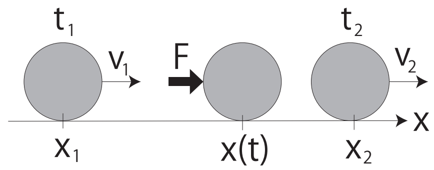

図 15: 時刻 t_1 から t_2 の間に質点に力 F が働き速度と位置が変化する様子.

5.3 運動量保存則：$m_A v_A + m_B v_B$ = 一定

2つの質点AとBが互いに力を及ぼし合って運動しているとする（図16）．質点A，Bの位置を $x_A(t)$, $x_B(t)$ とおくと，運動方程式は

$$m_A \ddot{x}_A = F, \quad m_B \ddot{x}_B = -F \tag{87}$$

となる [8]．2つの方程式を足すと

$$(m\dot{x}_A + m\dot{x}_B)^{\cdot} = F + (-F) = 0 \tag{88}$$

この式の両辺を時刻 t_1 から t_2 まで積分すると

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} (m\dot{x}_A + m\dot{x}_B)^{\cdot} dt &= [m\dot{x}_A + m\dot{x}_B]_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} 0 dt = 0
\end{aligned}
\tag{89}
$$

したがって,「2 つの質点の運動量の和は保存される」(運動量保存則)という公式

$$mv_A(t_1) + mv_B(t_1) = mv_A(t_2) + mv_B(t_2) \tag{90}$$

は 2 つの運動方程式の和を時間で積分することで得られる.

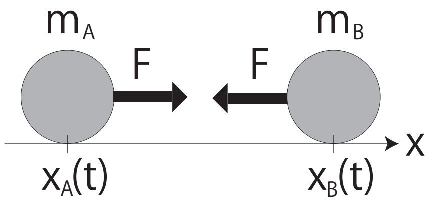

図 **16:** 運動方程式 (87) に対応する状況.

5.4 運動エネルギーと仕事：$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$

運動方程式 $m\ddot{x} = F$ に $\dot{x}$ を掛けると

$$m\dot{x}\ddot{x} = F\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)^{\cdot} = F\dot{x} \tag{91}$$

を得る [9].両辺を時刻 t_1 から t_2 まで積分する

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)^{\cdot} dt = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right]_{t_1}^{t_2}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt = \int_{x_1}^{x_2} F dx \tag{92}$$

ただし,最後の等式では $x_1 = x(t_1)$,$x_2 = x(t_2)$ とおき,$\int \frac{dx}{dt}dt = \int dx$ を使っている [10].

こうして,「運動エネルギーの変化は外力によってなされる仕事に等しい」という公式

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx \tag{93}$$

は運動方程式に速度を掛けて時間積分することで得られる(図 15).$F =$ 一定 もしくは,距離 $\Delta x = x_2 - x_1$ が短く,その間に $F =$ 一定と見なせる場合には,F は積分の外に出るので

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\Delta x \tag{94}$$

という高校の教科書でお馴染みの形になる.

表 **3:** 運動方程式(**EOM**)の積分で得られる保存則など.

保存則	導出方法
$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt$	EOM を t 積分
$m_A v_A(t_1) + m_B v_B(t_1) = m_A v_A(t_2) + m_B v_B(t_2)$	A,B の EOM を加えてから t 積分
$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$	EOM に $\dot{x}$ を乗じてから t 積分
$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2)$	上式に $F = -U'(x)$ を代入

5.5 力学的エネルギー保存則：$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) =$ 一定

力 $F(x)$ が,ある関数 $U(x)$ の微分に負符号を付けたもので与えられるとき,$U(x)$ をポテンシャル(potential),$F(x)$ を保存力(conservative force)という.

$$F(x) = -U'(x) \tag{95}$$

例えば,

$$U(x) = mgx \tag{96}$$

とおけば重力を表し

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{97}$$

とおけばバネ力を表す.

力が保存力の場合には (93) の右辺を次のように変形できる.

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = -\int_{x_1}^{x_2} U'(x) dx$$
$$= -[U(x)]_{x_1}^{x_2} = U(x_1) - U(x_2) \qquad (98)$$

したがって,「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は保存される」(力学的エネルギー保存の法則)という公式

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2) \qquad (99)$$

が (93) の特別な場合として導出された.

種々の保存則とその導き方を表 3 にまとめた.

6　結び

6.1　運動方程式から全てが導かれる

本稿では,ニュートンの運動方程式を微分方程式として捉えれば,公式を覚えずに多くの問題(等加速度運動,抵抗力が働く運動,ばね振り子の運動)が解けることを学んだ.また,種々の保存則(運動量と力積,運動量保存則,運動エネルギーと仕事,力学的エネルギー保存則)は運動方程式の積分形であることを学んだ.　図 17 はこれらをまとめたものである.本稿の各節と対比させて復習に役立てて欲しい.これらを身につければ,受験に役立つのはもちろん,大学に入ってからの数学・物理・化学・生物など様々な学習に役立つはずである.より本格的に微分積分を取り入れて力学を勉強したい人は,参考文献にあげた参考書 [5, 8] を用いるとよい.

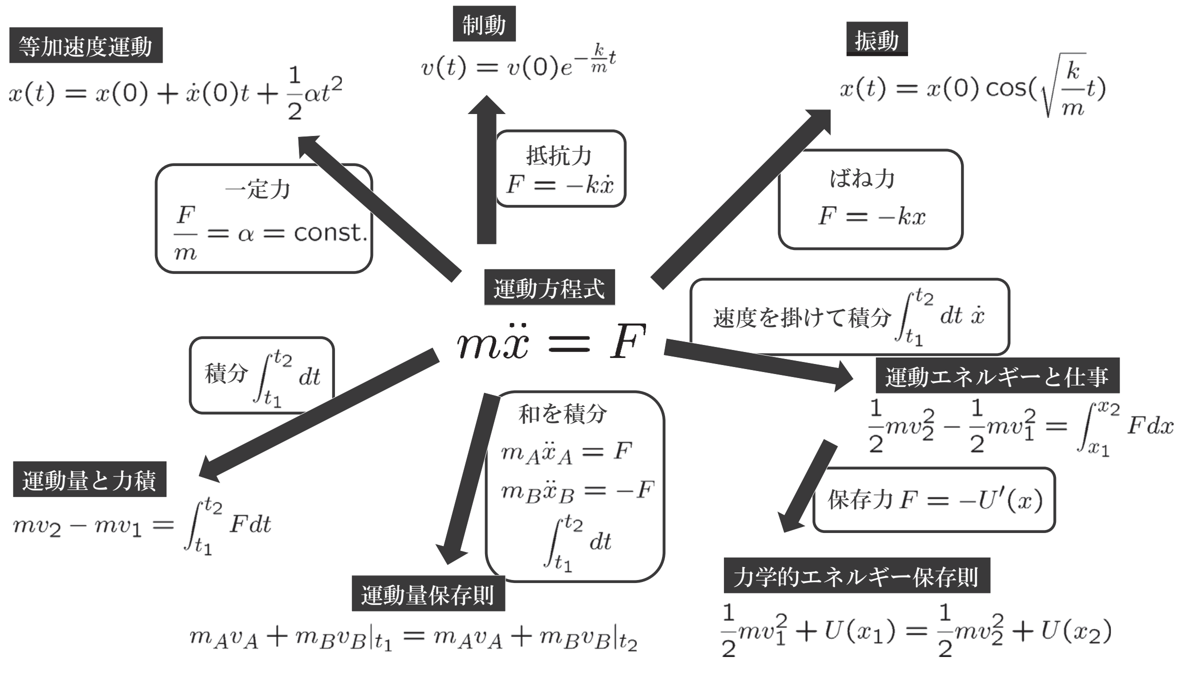

図 **17:** 本稿のまとめ.運動方程式($m\ddot{x}(t) = F$)を積分することで,速度 $v(t) = \dot{x}(t)$ や位置 $x(t)$ が時間の関数としてわかる(公式を覚えるのはやめよう).また,運動方程式を積分することで,運動量とエネルギーに関する保存則が導かれる(運動方程式と独立な法則があるわけではない).

6.2　物理還元主義と教養教育

現代物理学の分野は多岐にわたる．しかし，それらの背後には一貫してある種の還元主義がある．つまり，自然がどんなに複雑怪奇な振る舞いをしようとも，背後には数式で表現できる少数の原理・法則が存在し，全てはそこから演繹できるという確信にも近い信念である．

この還元主義は物理学のアイデンティティと言ってもよい．そして，物理学が他の科学の模範と言われることがあるとすれば，その理由は，物理学が幾度の危機に瀕しながらも，その度，既存の理論を一般化する形で新たな原理・法則を見出し，最終的には還元主義が勝利することを享受してきたからである [11]．

残念ながら，高校物理を学ぶだけでは，物理学が徹底した還元主義による学問であることや，それが通用するほど自然は単純で美しいことを理解するのは難しい．何故なら，冒頭で述べたように，高校物理では数学の使用が強く制限されているため，数多くの雑多な原理・法則が独立に存在・成立しているようにしか見えないためである．

図 17 が示すように，力学は上記の物理還元主義の縮図である．しかも，本稿によって，それを理解するには高校数学の知識だけで十分であることが証明された．理工系に進む高校生に向けた高大接続授業や，大学初年次における教養物理・教養数学の導入部分に，これ以上適したテーマが一体あるだろうか．

謝辞

毎年「ハイレベル数学講座」の開講に協力して下さる秋田県立大学の教職員の皆様にこの場を借りてお礼申し上げます．特に，講座の立ち上げから現在まで，様々なご意見・アドバイスを下さった宮崎悟先生に感謝の意を表します．また，講座を受講し有益なフィードバックを下さった高校生の皆様に感謝致します．

註

[1] 何故なら，(7) を微分すれば (6) が得られるから．

[2] $[\log_e f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$．ここで，$e = 2.718\cdots$ は自然対数の底．

[3] $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$．

[4] $a \neq 0, b, c$ を定数として，

$$ay''(x) + 2by'(x) + cy(x) = 0 \tag{100}$$

の形の微分方程式には，次のような強力な解法が存在する [5, 4]．まず，$y = e^{\lambda x}$（λ は未定の複素数）という解を仮定し (100) へ代入する．すると，λ に対する 2 次方程式（特性方程式と呼ばれる）

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \tag{101}$$

を得るので，この解を

$$\lambda_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{102}$$

とおけば，微分方程式の解は，A, B を任意定数として

$$y = Ae^{\lambda_+ x} + Be^{\lambda_- x} \tag{103}$$

で与えられる．ただし，特性方程式が重根 $\lambda = \lambda_+ = \lambda_-$（即ち $b^2 - ac = 0$）をもつ場合，解は

$$y = e^{\lambda x}(Ax + B) \tag{104}$$

で与えられる．この解法は第 3 節–第 4 節で扱う殆ど全ての微分方程式を解けてしまうほど強力な方法であるが，複素数の扱いなどに高校数学以上の知識（オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ など）が必要になるので，本文中では採用しなかった．

[5] 合成関数の微分法 $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$ より $(\sin \omega t)^\cdot = (\omega t)^\cdot \cos \omega t = \omega \cos \omega t$ などに注意．

[6] 振動の周期 T は，三角関数の中身が 2π 進む時間だから，次のように求められる．

$$\begin{aligned} \omega(t+T) &= \omega t + 2\pi \\ \Longrightarrow \quad T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \tag{105}$$

[7] 振動の周期 T は，三角関数の中身が 2π 進む時間だから，次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
&\omega(t+T) = \omega t + 2\pi \\
\Longrightarrow \quad &T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}
\end{aligned}
\tag{106}
$$

[8] ここで，ニュートンの運動の第 3 法則によって B が受ける力は A が受ける力の反対方向で大きさが等しいことを用いた．

[9] 積の微分公式より，$(\dot{x}^2)^{\cdot} = (\dot{x}\dot{x})^{\cdot} = \ddot{x}\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} = 2\dot{x}\ddot{x}$ に注意．

[10] これは「数学 III」で学習する置換積分 $\int f(x)dx = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$ の $f(x) = 1$ という特別な場合であり，微分の記号 $\frac{dx}{dt}$ は分数のように扱ってもよいことを表している．

[11] 力学以外の分野においても，この還元主義が機能していることは，本稿の続編 [6] でご覧に入れる予定である．

参考文献

[1] S. Chandrasekhar (著), 中村誠太郎 (監訳) (1998)．「チャンドラセカールの「プリンキピア」講義」講談社

[2] 國友正和ほか（2012）．「物理」数研出版

[3] 大矢雅則ほか（2016）．「改訂版　新編　数学 III」数研出版

[4] 矢野健太郎，石原繁（1965）．「解析学概論（新版）」裳華房

[5] 兵頭俊夫（2001）．「考える力学」学術図書出版

[6] 宮本雲平（準備中）．「微分方程式と次元解析をテーマとした物理の高大接続授業 II」

[7] 青野修（1982）．「次元と次元解析」共立出版

[8] 山本義隆（2004）．「新・物理入門　増補改訂版」駿台文庫