秋田県立大学総合科学研究彙報　第22号（2021）：109－119

大学生が記号論理学を学ぶ意義と教材の一例

宮　本　雲　平

1　はじめに

論理学は正しい推論とはどのようなものかを追求する学問である．正しい推論は全ての知的活動の基礎となるから，学問を生業とする者はもちろん，そうでない者にとっても，教養として論理学の初歩を身につけることは有益なはずである．このことは，かつて欧州の大学教育においてあらゆる知識・学問の基礎とされていた自由七科（リベラル・アーツ）に論理学が含まれていたという事実からも明らかである．

しかし，本国の学校教育では高校数学における《集合と命題》（現在は「数学 I」の一単元 [1]）が論理学に触れるものの，十分な学びの機会は与えられない．また，大学教育においても，一部の分野（哲学 [2]・計算機科学 [3]・数学 [4]・言語学・法学など）を専攻する者以外が学ぶ機会に出会うことは稀である．

一方，ある程度の論理的思考法を身につけていることは常識として捉えられている面もある．例えば，就職時の適性検査で試されることがあるし [5]，専門的な学びの場においては当然のことと仮定される．

ただし，世の中では論理的思考という言葉が一人歩きをしているだけで，とても正しく理解されているとは言い難いこがあることにも注意が必要である．例えば，論理性と合理性の混同などはよく見受けられる．

論理学・教育学の専門家でない筆者が，これ以上本国における論理学の教育について語るつもりはない．しかし，数学を教える傍ら理論物理学を研究する筆者が，職業柄，論理学の一形式である記号論理学（数理論理学）に触れて感じるのは,「大学生が論理学を学ばないのはもったいない」という素朴な思いである．特に，日頃から数学に慣れ親しんでいる理工系の学生にとっては，形式化された記号論理学は馴染みやすいはずである．この点は，現代数学が記号論理学の規則に則って記述されているのであるから，当然と言えば当然である．

そこで本稿では，理工系大学生が論理学の基礎を習得するのに最適な教材とはどのようなものかという問いに答えるべく，非専門家である筆者が，記号論理学の基礎にあたる命題論理学を前提知識なしで学べる教材を作ることに挑戦している．具体的には，高校数学で学ぶ対偶証明法・背理法や日常会話でもよく用いられる三段論法を正確に理解することを目標に設定し，それを最短ルートで達成できるよう設計されている．また，一般論に対して豊富な例が示され，読者が迷子にならぬよう工夫されている．

できあがった教材（本稿の第２節–第４節）を教養数学科目の冒頭に組み込むなどして活用することを考えている．ただし，本稿を読むのに必要な数学の知識は，中学校における学習内容程度にとどめてあるので，記号論理

学（数理論理学）入門と言えども，読者を理工系大学生に限るものではない．もっと言えば，純粋に数学的な例（命題）も登場するが，それらをスキップして読んでも本筋の理解には全く差し支えない．

本稿に独自性があるとすれば，日常生活で馴染み深いであろうオリジナルな例を挙げている点，初学者が躓くであろう点（例えば含意（$\rightarrow$）と推論（$\Rightarrow$）の違い，対偶証明法・背理法が直感と相容れないこと）がなぜ理解しにくいかについて考察している点にある．また，対偶証明法・背理法・三段論法の理解という目標を達成するにあたり，極力無駄を排除しつつも必要な事柄は全て書かれている点（self-contained であること）も特徴である．

まずはじめに，第 2 節で命題や論理結合子など諸概念の定義を行う．次に，第 3 節でそれらにどのような性質があるかを紹介する．そして，第 4 節においてそれらの性質を利用した推論の方法として対偶証明法・背理法・三段論法を紹介し，第 5 節でまとめを行う．

2　諸定義

2.1　命題と結合

真（しん）（true）か偽（ぎ）（false）のどちらであるか判定できる主張を命題（proposition）という．

例 2.1
「この風船は赤い」は，風船は赤いか赤くないかのどちらかであるので，命題である [1]．　□

例 2.2
「この風船はかわいい」（主観的な文），「何て色鮮やかな風船なのでしょう」（感嘆文），「これは風船ですか？」（疑問文）などは命題ではない．　□

例 2.3
「この文は偽である」という文は真と仮定すると偽となり，偽と仮定すると真となり，真偽を判定できないので命題ではない．このように，真であると偽，偽であると真であるように結論づけられるような主張を逆説（paradox）という．特にこの例文は，自己言及のパラドックス（liar paradox）と呼ばれるものの 1 つである．　□

常に真である命題を恒真命題（tautology）$\top$，常に偽である命題を恒偽命題（contradiction）$\bot$ という．

例 2.4
「この風船は赤いか赤くない」は常に真なので恒真命題である（後述の排中律 (18) を参照）．　□

例 2.5
「この風船は赤くて赤くない」は常に偽なので恒偽命題である（後述の矛盾の原理 (19) を参照）．　□

1 つまたは 2 つ以上の命題と，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ といった論理結合子（logical connective）を組み合わせることで新たな命題を作ることができる．新たに定義された命題の真偽は材料となる命題の真偽に対して定義されており，定義は真理値表（truth table）で表すことができる．

命題 P に対して，P と真偽が逆となる命題を P の否定（negation）といい，$\neg P$（not P）と書く（表 1）[2]．

表 1: 否定に関する真理値表．T は真（true），F は偽（false）を表す．

P	T	F
$\neg P$	F	T

例 2.6
「P : この風船は赤い」の否定は「$\neg P$: この風船は赤くない」である.「この風船は青い」は「この風船は赤い」以外全ての状況をカバーしていないので，P の否定ではない（後述の排中律 (18) を参照）． □

連言（conjunction）$P \wedge Q$（P かつ Q ; P and Q）は命題 P, Q が共に真のときに限り真となる命題として定義される（表 2）．

表 2: 連言に関する真理値表.

P	T	T	F	F
Q	T	F	T	F
$P \wedge Q$	T	F	F	F

例 2.7
「P : この風船は赤い」と「Q : この風船は丸い」の連言は「$P \wedge Q$: この風船は赤くて丸い」である. □

選言（disjunction）$P \vee Q$（P または Q ; P or Q）は P, Q のうち少なくとも 1 つが真のときに限り真となる命題として定義される（表 3）．

表 3: 選言に関する真理値表.

P	T	T	F	F
Q	T	F	T	F
$P \vee Q$	T	T	T	F

例 2.8
例 2.7 において，選言は「$P \vee Q$: この風船は赤いか丸い」である．ただし，これは「赤くて丸い」場合も含むことに注意すべきである．日常会話における「赤いか丸い」はどちらかと言うと,「丸くなくて赤い，または，赤くなくて丸い」を示すと考えられる．この意味で，論理学の「または」と日本語の「または」とには乖離がある．後者の「または」は論理学では排他的論理和（exclusive disjunction）$P \veebar Q$ と名前が付いており，これまで定義した記号で書くならば，$P \veebar Q \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \neg[P \wedge Q] \wedge [P \vee Q]$ となる [3]. □

含意（implication）$P \to Q$（P ならば Q ; If P, then Q）は P が偽または Q が真のときに限り真となる命題として定義される（表 4）．即ち，

$$P \to Q \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [\neg P] \vee Q \tag{1}$$

含意 $P \to Q$ において，P を前件（antecedent），Q を後件（descendant）と呼ぶ.

表 4: 含意に関する真理値表.

P	T	T	F	F
Q	T	F	T	F
$P \to Q$	T	F	T	T

例 2.9
妻が夫に「あなたが浮気したら離婚する」と言った場合を考える.「P : 浮気する」「Q : 離婚する」と定めたとき，含意 $P \to Q$ は「浮気したら離婚する」である．これが偽となるのは「浮気したのに離婚しない」（P が真，Q が偽）場合だけである．浮気していない場合には離婚してもしなくても嘘をついていることにはならない．P が偽のときは Q の真偽に依らず $P \to Q$ が真と定義されている（表 4）のはこのためである．この意味で，論理学における含意 $P \to Q$ は我々が日常的につかう「ならば」を的確に捉えている． □

もうひとつ，残酷だが優れた例を見てみよう [6, p. 21].

例 2.10
「動いたら撃つぞ」は「P : 動く」「Q : 撃つ」の含意 $P \to Q$ である．これが嘘になるのは，

動いたのに撃たないときのみである．論理学的には，動いていないのに撃たれても文句は言えない．因みに,「動いたら撃つぞ」は英語で言うと，

"*If* you move, *then* I'll shoot you."

であるが，これは

"*Don't* move, *or* I'll shoot you."

ということもできる．これは定義 (1) を記憶する一助となる [4]．□

P が真なら Q も真であるとき，$P \Rightarrow Q$ と書き，P から Q が推論（inference）される，または, P から Q が演繹（deduction）されるという [5]．P が真なら Q も真であるのは「$P \to Q$ が恒真命題である」と同じことなので，これを $P \Rightarrow Q$ の定義と置き換えても差し支えない．$P \Rightarrow Q$ において，P を前提（premise），Q を結論（conclusion）という．P が真でも Q が真とは限らないことを $P \nRightarrow Q$ と書く．$P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$ のとき $P \Leftrightarrow Q$ と書き，P と Q は論理的に同等（logically equivalent）であるという．

例 2.11

「$P \wedge Q$: この風船は赤くて丸い」が真ならば「P : この風船は赤い」は真なので，$P \wedge Q \Rightarrow P$ であるが，赤くて細長い風船もあるので，$P \nRightarrow P \wedge Q$ である．□

初学者は，$P \to Q$ は 2 つの命題から構成された 1 つの命題であるが，$P \Rightarrow Q$ は命題ではなく,「命題 P が真なら命題 Q も真である」という「状況」を記号で表したものであることに注意しなければならない [7, p. 45]．

2.2　演算や図による命題の表現

この節では，演算や図によって論理を表現する方法を紹介する．これらの方法は理解を助けはするが，第 4 節の内容を理解するのに必須のものではないので，飛ばしても差し支えない．

命題や命題の結合を数やその演算で処理することを論理演算（logical operation）という [3]．

論理演算において，連言は論理積（logical conjunction），選言は論理和（logical disjunction）と呼ばれる．その理由は次のようである．真を数の 1，偽を数の 0 に対応させるとすれば，連言に関する真理値表（表 2）は次のような演算 $\wedge$ の結果として理解することができる．

$$1 \wedge 1 = 1 \tag{2}$$
$$1 \wedge 0 = 0 \tag{3}$$
$$0 \wedge 1 = 0 \tag{4}$$
$$0 \wedge 0 = 0 \tag{5}$$

これらは 1 と 0 の間の通常の積と同じ演算規則（$1 \times 1 = 1,\ 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0 \times 0 = 0$）をもつ．

同様に，選言に関する真理値表（表 3）は次のような演算 $\vee$ の結果として理解できる．

$$1 \vee 1 = 1 \tag{6}$$
$$1 \vee 0 = 1 \tag{7}$$
$$0 \vee 1 = 1 \tag{8}$$
$$0 \vee 0 = 0 \tag{9}$$

$1 \vee 1$ の部分だけを除いて，これらは 1 と 0 の間の通常の和と同じ演算規則（$1+0 = 0+1 = 1,\ 0 + 0 = 0$）をもつ．

否定 $\neg$ は 1 と 0 を入れ替える演算として表現できる．

$$\neg 1 = 0 \tag{10}$$
$$\neg 0 = 1 \tag{11}$$

このように，論理を数式で表すことにすれば，複雑な論理の真偽を演算の結果として導くこともできる．このような考え方はコンピューターで用いられる論理演算の基礎となっている．

次に，集合論で使われるベン図（Venn diagram）による命題の表現について述べておく．これを用いると命題を視覚的に捉えることができる．

図 1 のように四角の中に円を 2 つ描く．左の円の内側が塗られた状態が P が真であることを表し，左の円の外側が塗られた状態が P が偽（つまり $\neg P$ が真）であることを表していると約束する．同様に，右の円の内側と外側が塗られていることを Q の真と偽に対応させる．すると，$P \wedge Q$ が真であることは左の円と右の円の共通部分が塗られているベン図に対応しており，$P \vee Q$ が真であることは左の円と右の円が共に塗られているベン図に対応していることがわかる．

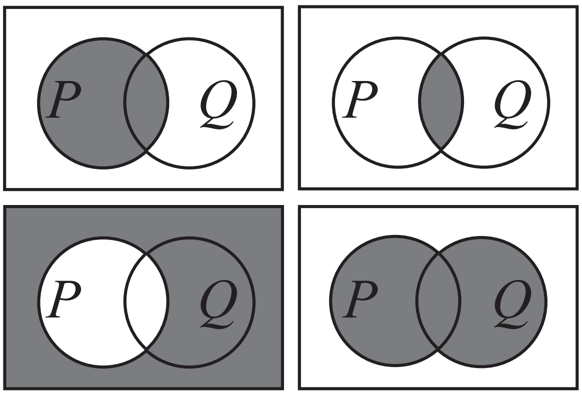

図 1: ベン図による命題の表現．左上から反時計回りに，$P, \neg P, P \vee Q, P \wedge Q$ を表している．何れの図においても，左の円の内側と外側がそれぞれ P の真と偽に対応し，右の円の内側と外側がそれぞれ Q の真と偽に対応している．

また，推論 $P \Rightarrow Q$（P が真なら Q も真という状況）をベン図で表すことも可能である．まず，$P \to Q$ が (1) で $\neg P \vee Q$ として定義されていることに注意しよう（図 2 の左図）．ここで，$P \Rightarrow Q$ の定義は $P \to Q$ が恒真であることと考えてよいことを思いだそう．つまり，図 2 の左図において白い部分がなくなることを意味している．これは，図 2 の右図のように，P の円が Q の円の内部にある場合に対応している．

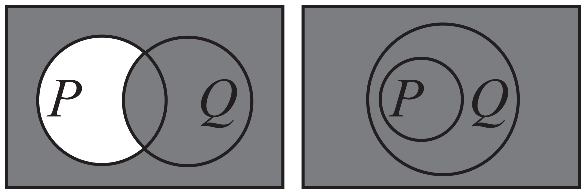

図 2: （左）ベン図による含意 $P \to Q$ の表現．（右）ベン図を用いた推論 $P \Rightarrow Q$ の表現．内側と外側の円の内側がそれぞれ P と Q の真に対応している．P の円が Q の円の内部にあるので，$P \to Q$ が恒真になっている．

3　命題の結合と否定に関する諸法則

連言と選言には交換律（commutative law）と結合律（associative law）がある．つまり，任意の命題 P, Q について

$$P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge Q \qquad \text{(交換律)} \qquad (12)$$

$$[P \wedge Q] \wedge R \Leftrightarrow P \wedge [Q \wedge R] \qquad \text{(結合律)} \qquad (13)$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q \qquad \text{(交換律)} \qquad (14)$$

$$[P \vee Q] \vee R \Leftrightarrow P \vee [Q \vee R] \qquad \text{(結合律)} \qquad (15)$$

が成立する．これらは真理値表を書くことで確かめられる．また，

$$P \wedge Q \Rightarrow P, \quad P \wedge Q \Rightarrow Q \qquad (16)$$

$$P \Rightarrow P \vee Q, \quad Q \Rightarrow P \vee Q \qquad (17)$$

が成り立つ．これらは表 2 や表 3 から確かめられる．

否定には次の性質が備わっているものとする．

$$P \lor [\neg P] \Leftrightarrow \top \quad (\text{排中律}) \tag{18}$$

$$P \land [\neg P] \Leftrightarrow \bot \quad (\text{矛盾律}) \tag{19}$$

$$\neg[\neg P] \Leftrightarrow P \quad (\text{二重否定の原理}) \tag{20}$$

これらは順に，排中律（law of excluded middle），矛盾律（law of contradition），二重否定の原理（law of double negation）と呼ばれる（表 5）．排中律を必須とする論理を古典論理（classical logic），直観主義論理（intuitionistic logic）のような排中律を課さない論理を非古典論理（non-classical logic）と呼ぶ．本稿では古典論理のみ考える．

表 5: 排中律 (18)，矛盾律 (19)，二重否定の原理 (20) に関する真理値表.

P	T	F
$\neg P$	F	T
$P \lor \neg P$	T	T
$P \land \neg P$	F	F
$\neg[\neg P]$	T	F

恒真命題 $\top$ と恒偽命題 $\bot$ には次の性質がある．

$$P \land \top \Leftrightarrow P \tag{21}$$

$$P \lor \top \Leftrightarrow \top \tag{22}$$

$$P \land \bot \Leftrightarrow \bot \tag{23}$$

$$P \lor \bot \Leftrightarrow P \tag{24}$$

これらは真理値表を書くことで確かめられる．

ある命題 P と選言 $Q \lor R$ の連言，および，ある命題 P と連言 $Q \land R$ との選言には次のような分配律（distributive law）が成立する．

$$P \land [Q \lor R] \Leftrightarrow [P \land Q] \lor [P \land R] \quad (\text{分配律}) \tag{25}$$

$$P \lor [Q \land R] \Leftrightarrow [P \lor Q] \land [P \lor R] \quad (\text{分配律}) \tag{26}$$

これらは真理値表を書くことで確かめられる．

連言と選言の否定に関して，ド・モルガンの法則（de Morgan's law）

$$\neg[P \land Q] \Leftrightarrow [\neg P] \lor [\neg Q] \tag{27}$$

$$\neg[P \lor Q] \Leftrightarrow [\neg P] \land [\neg Q] \tag{28}$$

が成立する．これらは真理値表を書くことで確かめられる．ド・モルガンの法則によって，連言と選言は否定を通じた双対性（そうついせい）（duality）をもっていると言われる．

例 3.1

秋田県立大学の教員について「P：センター（総合科学教育研究センター）の教員である」「Q：准教授である」とする．このとき,「$\neg[P \land Q]$：センターの准教授ではない」は「センターの教員ではない，または，准教授ではない」（つまり，学部や他研究所に属する，または，教授か助教である）と同じことである．また,「$\neg[P \lor Q]$：センターの教員または准教授である，というわけではない」は,「センターの教員でなく，准教授でもない」（つまり，学部か他研究所の教授か助教である）と同じことである． □

表 6: ド・モルガンの法則 (27)(28) に関する真理値表.

P	T	T	F	F
$\neg P$	F	F	T	T
Q	T	F	T	F
$\neg Q$	F	T	F	T
$P \land Q$	T	F	F	F
$\neg[P \land Q]$	F	T	T	T
$P \lor Q$	T	T	T	F
$\neg[P \lor Q]$	F	F	F	T
$[\neg P] \lor [\neg Q]$	F	T	T	T
$[\neg P] \land [\neg Q]$	F	F	F	T

4　推論の方法

いよいよ準備が整った．これまでに学んだ論理学の基礎を用いて，高校数学で学習する対偶証明法と背理法の原理を眺めてみよう．また，代表的な推論の方法である三段論法の原理についても見ていこう．

4.1　対偶証明法

P, Q を任意の命題とする．含意 $P \to Q$ に対して，$\neg Q \to \neg P$ を対偶（contraposition）という．$P \to Q$ と $\neg Q \to \neg P$ の真偽は常に一致することが知られている．つまり，

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P \tag{29}$$

が成り立つ[6]．

したがって，$P \to Q$ が真であることを証明したいとき，代わりに $\neg Q \to \neg P$ が真であることを証明してもよい．これを利用した証明法を対偶証明法（proof by contrapositive）という．

(29) が正しいことは次のようにして示される．

$$\neg Q \to \neg P \overset{(1)}{\Leftrightarrow} Q \vee \neg P \tag{30}$$

$$\overset{(14)}{\Leftrightarrow} \neg P \vee Q \tag{31}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} P \to Q \tag{32}$$

例 4.1

孫がいるなら子供もいる．

「P：孫がいる」「Q：子供がいる」とすると，与えられた命題は含意 $P \to Q$ である．$P \to Q$ が正しい（真である）ことを証明するには，その対偶「$\neg Q \to \neg P$：子供がいないなら孫はいない」ことが正しいことを証明してもよい．つまり，次のような証明が可能となる．

証明：子供がいないとする．このとき，子供の子供（つまり孫）がいないのは明らか．したがって「孫がいるなら子供もいる」が示された．　□

例 4.2

n^2 が偶数ならば n は偶数である．

「P：n^2 が偶数」「Q：n が偶数」とすると，与えられた命題は含意 $P \to Q$ である．$P \to Q$ が真であることを証明するには，その対偶「$\neg Q \to \neg P$：n が奇数ならば n^2 が奇数である」が真であることを証明してもよい．つまり，次のような証明が可能となる．

証明：n が奇数と仮定すると，$n = 2m - 1$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ と書けるが，このとき $n^2 = (2m-1)^2 = 2(2m^2 - 2m) + 1$ となり n^2 も奇数である．したがって n^2 が偶数ならば n は偶数である．　□

対偶証明法による証明は，ときに読む者を騙されたような感覚に陥らせる．その主な理由として，次のような点があるのではないか．

- 証明したい $P \to Q$ という命題の論理の向き（「論理の向き」自体は正確に定義された言葉ではない）と $\neg Q \to \neg P$ という命題の論理の向きが逆で，使い慣れている通常の演繹と異なるから．
- $\neg P, \neg Q$ は P, Q の否定なので，P, Q が真である状況以外の全ての状況を考えることになる．すると，「無駄に話を大きくして煙に巻かれた」という感覚に陥ってしまうから．
- 証明の冒頭で真でないこと（つまり $\neg Q$）を仮定するので，証明の途中で，間違いではないが通常は想定しないような状況や概念（「存在しない人は子供を産まない」など）が現れるから．

上記の2つめの理由が顕著になる例をもう1つ見てみよう．

例 4.3
秋田県民なら日本国民である．

「P : 秋田県民である」「Q : 日本国民である」とすると，証明したいのは $P \to Q$ であるが，対偶証明法によって「$\neg Q \to \neg P$: 日本国民でないなら秋田県民でない」を示すことでこれを証明しよう．すると，次のようになる．

証明 : 日本国民でないと仮定すると外国人（外国籍の人）である．外国人に秋田県民はいない．したがって，秋田県民なら日本国民である．

このように，日本国内の話をしているはずなのに一見不要とも思える外国人の話が現れ，無駄に話を大きくされたという感覚に陥る（人もいるだろう）．ただし，日本国民という概念が出てきている時点で外国人の概念は不可避であるため，これは勘違いである．□

次に述べる背理法にも似たような性質があるが，いずれも強力な証明方法であることに違いはない．

4.2　背理法

任意の命題 P は，$\neg P \to \bot$ と真偽が一致する．即ち，

$$P \Leftrightarrow \neg P \to \bot \tag{33}$$

が成立する．

したがって，P が真であることを証明する代わりに，$\neg P$ が真ならば矛盾 $\bot$ が発生することを示してもよい．これを利用した証明法が背理法（proof by contradiction）である．

(33) が正しいことは次のようにして示される．

$$\neg P \to \bot \overset{(1)}{\Leftrightarrow} P \vee \bot \overset{(24)}{\Leftrightarrow} P \tag{34}$$

例 4.4
$\sqrt{2}$ は無理数である．

「P : $\sqrt{2}$ は無理数である」としよう．$\sqrt{2}$ が無理数であることを何かから推論するのは難しいと判断した場合，$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定して矛盾を導く次のような証明が考えられる．

証明 : $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，互いに素な（=最大公約数が1の）2つの自然数 m, n を用いて $\sqrt{2} = m/n$ と書ける．このとき，$m^2 = 2n^2$ が成り立つので，m^2 は偶数であるから m も偶数である（例 4.2 参照）．そこで，$m = 2k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくと，$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ より $n^2 = 2k^2$．よって n も偶数となる．しかし，m, n が共に偶数であることは，m, n が互いに素であることに矛盾する．したがって $\sqrt{2}$ は無理数である．　□

次の事実に基づく証明も背理法と呼ばれる．

$$P \to Q \Leftrightarrow [P \wedge \neg Q] \to \bot \tag{35}$$

つまり，$P \to Q$ が真であることを示すのに，P および $\neg Q$ が真であることを仮定して矛盾を導く方法である．

(33) が正しいことは次のようにして示される．

$$[P \wedge \neg Q] \to \bot \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg[P \wedge \neg Q] \vee \bot \tag{36}$$

$$\overset{(24)}{\Leftrightarrow} \neg[P \wedge \neg Q] \tag{37}$$

$$\overset{(27)}{\Leftrightarrow} \neg P \vee Q \tag{38}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} P \to Q \tag{39}$$

例 4.5
孫がいるなら子供もいる（例 4.1 に同じ）．

証明 : 孫がいるのに子供がいないと仮定する．すると，子供の子供は存在しなが，孫がい

ることになる．これは矛盾である．したがって，孫がいるなら子供もいることが示された． □

例 4.6
n^2 が偶数ならば n は偶数である（例 4.2 に同じ）．

証明：n^2 が偶数，かつ，n が奇数と仮定すると，$n = 2m-1$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ と書けるが，このとき $n^2 = (2m-1)^2 = 2(2m^2 - 2m) + 1$ となり n^2 が偶数であることに矛盾する．したがって n^2 が偶数ならば n は偶数である． □

4.3　三段論法

三段論法（syllogism）には様々なものがあるが基本的なものを 3 つ紹介する．1 つめは

$$P \wedge [P \to Q] \Rightarrow Q \tag{40}$$

である．(40) が正しいことは次のように証明される．

$$\begin{aligned}
P \wedge [P \to Q] &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} P \wedge [\neg P \vee Q] && (41)\\
&\overset{(25)}{\Leftrightarrow} [P \wedge \neg P] \vee [P \wedge Q] && (42)\\
&\overset{(19)}{\Leftrightarrow} \bot \vee [P \wedge Q] && (43)\\
&\overset{(24)}{\Leftrightarrow} P \wedge Q && (44)\\
&\overset{(16)}{\Rightarrow} Q && (45)
\end{aligned}$$

例 4.7
「私は日本人だ．日本人は我慢強い．だから私は我慢強い．」 □

例 4.8
「英雄色を好む．我は色を好む．ゆえに我は英雄なり．」というジョークは (40) の意図的な誤用である．「P：英雄である」「Q：色を好む」としたとき，この命題は $[P \to Q] \wedge Q \Rightarrow P$ と述べているが，実際は $[P \to Q] \wedge Q \not\Rightarrow P$ である．正しい推論として有り得るのは，「$[P \to Q] \wedge P$：英雄色を好む．我は英雄なり．ゆえに我は色を好む．」である． □

2 つめは次の事実に基づくものである．

$$[P \to Q] \wedge [Q \to R] \Rightarrow P \to R \tag{46}$$

これが正しいことは (40) を用いて次のように示される．

$$\begin{aligned}
&[P \to Q] \wedge [Q \to R] && (47)\\
&\overset{(1)}{\Leftrightarrow} [\neg P \vee Q] \wedge [Q \to R] && (48)\\
&\overset{(25)}{\Leftrightarrow} [\neg P \wedge [Q \to R]] \vee [Q \wedge [Q \to R]] && (49)\\
&\overset{(40)}{\Rightarrow} [\neg P \wedge [Q \to R]] \vee R && (50)\\
&\overset{(26)}{\Rightarrow} [\neg P \vee R] \wedge [[Q \to R] \vee R] && (51)\\
&\overset{(1)}{\Leftrightarrow} [P \to R] \wedge [[Q \to R] \vee R] && (52)\\
&\overset{(16)}{\Rightarrow} P \to R && (53)
\end{aligned}$$

例 4.9
「風が吹くと土ぼこりがたって目に入り盲人が増える．盲人が増えると盲人は三味線で生計を立てようとするから三味線の胴を張る猫の皮の需要が増える．よって，風が吹いたら猫が減る．」は (46) を使った推論である． □

(46) から，つぎが成立することを示すのは容易である．

$$\begin{aligned}
&[P_1 \to P_2] \wedge [P_2 \to P_3] \wedge \cdots \wedge [P_{n-1} \to P_n]\\
&\qquad \Rightarrow P_1 \to P_n, \quad n \geq 3 && (54)
\end{aligned}$$

これは n 段論法と呼び得るものである．例 4.9 は，(54) を用いた諺「風が吹けば桶屋が儲かる」[7] の一部を抜き出したものである．

3 つめは次の事実に基づくものである．

$$\neg P \wedge [Q \to P] \Rightarrow \neg Q \tag{55}$$

これが正しいことは (40) を書き換えることにより示される．(40) において，P, Q は任意の

命題であるから，それぞれを $\neg P, \neg Q$ へ置き換えれば

$$\neg P \wedge [\neg P \to \neg Q] \Rightarrow \neg Q \tag{56}$$

となる．ここで，$[\neg P \to \neg Q]$ の部分に (29) を適用すれば (55) を得る．

例 4.10
「人気 YouTuber になるには，毎日動画をアップしなければならない．彼は毎日動画をアップできなかった．だから彼は人気 YouTuber にはなれなかった.」は (55) を用いた推論である． □

5　結び

本稿では，対偶証明法・背理法や三段論法を正しく理解することを目標に掲げ，命題論理の基本を最短で学ぶ教材を作ることに挑戦した．内容は初歩的と言えども，記号論理学に全く触れたことのない人にとっては，全てをすんなりと受け入れられるほど易しくはなかったかも知れない．自らペンを持って，ベン図などを描きながらある程度試行錯誤することが必要かも知れない．

記号論理学（symbolic logic）または数理論理学（mathematical logic）の基礎を学んだと言うには，命題論理（propositional logic）に加え，述語論理（predicate logic）も学ぶ必要があるだろう．後者は，本稿で学んだ論理結合子（$\neg, \wedge, \vee, \to$）などに加え，量化子（quantifier）と呼ばれる $\forall x$（任意の x について；for any x）や $\exists x$（ある x が存在して；there exists a x）の記号を導入し，命題の内部構造まで記述できるよう命題論理を拡張したものである [7]．述語論理を用いると，どんな複雑な数学の論証も記号を用いて曖昧さなく表現できるようになる．機会をみて，述語論理の入門教材の作成にも挑戦したい．

註

1 実生活では，「この風船は赤くて赤くない．赤紫だ.」という主張もできるが，そのようなどちらつかずの主張は命題とは見なされず，本稿で論じられる論理学の対象からは排除される．どちらつかずの主張も対象とするような枠組みは多値論理と呼ばれる [2, p. 5].

2 「P が真である」を単に「P である」と言うことがある．

3 「$X \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} Y$」という記号は，命題 X, Y の論理的同等性（後述）を表す記号 $X \Leftrightarrow Y$ に，定義（definition）であることを明示するための文字 def. を付けたものである．$X \Leftrightarrow Y$ に置き換えても差し支えない．

4 文献 [6] によると，この英文法の例えは前原昭二氏によるものとあるが，文献は見つけられなかった．

5 推論されることを「その推論は妥当（valid）である」と言う．

6 $P \to Q$ に対して，$\neg P \to \neg Q$ を裏（inversion），$Q \to P$ を逆（conversion）という．これらの真偽は $P \to Q$ の真偽と一般には一致しない．

7 風が吹くと土ぼこりがたって目に入り盲人が増える．盲人は三味線で生計を立てようとするから，三味線の胴を張る猫の皮の需要が増える．猫が減るとねずみが増え，ねずみが桶をかじるから桶屋がもうかって喜ぶ [8].

参考文献

[1] 大矢雅則ほか（著）(2016)．「改訂版　新編　数学 I」数研出版

[2] P. Kunzmann, F-P. Burkard, F. Wiedmann（著）, 忽那敬三（訳）(2010)．「哲学事典」共立出版

[3] 幸谷智紀，國持良行（2011)．「情報学の基礎」森北出版

[4] 青木利夫，高橋渉，平野載倫（1985)．「演習・集合位相空間」倍風館

[5] 柳本新二（2019)．「最新！SPI3【完全版】’21 年度版」高橋書店

[6] 長岡亮介（2017）.「論理学で学ぶ数学」旺文社

[7] 齋藤正彦（2010）.「日本語から記号論理学へ」日本評論社

[8] 松村明（監）（2020）.「デジタル大辞泉」小学館