応用研究論文

微分方程式と次元解析をテーマとした物理の高大接続授業 II

宮本雲平

秋田県立大学 総合科学教育研究センター

筆者は 2015 年より県内高校生に向け，高大接続授業「ハイレベル数学講座：数学で解く物理の世界」を開講している．講座の目的は「数学を使えば覚えるべき物理公式は数個に減る」ということを高校生に理解してもらい，物理学の単純さと自然の美しさを知ってもらうことである．前編（宮本，2021）では上記の目的を達成する意義と具体的な方法——高校数学の知識のみを用いてニュートンの運動方程式を微分方程式として捉える方法——について考察した．後編にあたる本稿では，力学以外の分野における運動方程式や，次元解析の考え方を教育する方法について紹介する．

キーワード： 県内高校，高大接続，物理，数学，微分方程式，次元解析

はじめに

「大学に行くと生物は化学に，化学は物理に，物理は数学に，数学は哲学になる.」

これは，高校と大学における学問のギャップについて，理系大学生が口にするジョークである．これを聞いて「聞き捨てならない」と驚いたり悲しんだりする専門家もいるようだが，冷静になって何故そう言われるのか少し考えてみる．ただしここでは物理と数学の関係に的を絞る．

もちろん，大学に行っても物理は物理で，数学は数学である．例えば，物理学における理論は数学的にどれほど美しかったとしても，実験・観測に矛盾するものは排除される．逆に，数学の理論は「数学的に面白ければアリ」なのであって，対応する自然現象がこの世に存在するか否かは大きな問題ではない（この点と極度の抽象化が「数学は哲学に」と言われる所以であろう）．これらの視点は物理と数学を明確に分けている．

しかし,「物理は数学に」は全くの嘘かと問われたら，半分は正しいと言ってもよい気がする．もし言い換えが許されるならば

「物理と数学は本来切っても切れない密接な関係にあるが，高校ではその関係は隠されている必要がある．大学ではその必要がなくなる.」

と言ったところである．

微分積分は，物体の運動を記述するために開発された言語である（Chandrasekhar，1998）．物理の基本法則は微分方程式で表現され，それを積分してその他の法則や現象が導かれるのである．しかし，高校物理では大人の事情（カリキュラム上や入試制度上の制約・配慮）から，物理では微分積分を使ってはならないことになっている（國友，2012）．したがって，少数の基本法則から全てが導かれる様を見ることができないので，図やグラフを使ってどうにかこうにか公式群を理解して（した気になって），その後はそれらを忘れないよう可能な限り多くの問題を解き，記憶のメインテナンスをすることになる．

一方，大学に入れば不自然な「R-18 指定」が取っ払われるので，物理学は少数の基本法則から全ての公式・自然現象を説明する（還元主義に基づく学問）という本来の姿を現す．必然的に物理の授業は数式で溢れかえり,「物理は数学になってしまった」と嘆く学生と,「大人の物理」に魅了される学生に二分されていく．

かと言って，高大のギャップを無くすことはほぼ不可能と言ってよいだろう．物事には順序があり，初めから微分積分を用いた物理学を学ぶのは現実的ではない．問題は，そのギャップを埋める作業を「必ずやる」ということと,「いつ，どこで，誰が」やるかということである．一つの理想は「大学入学後に微分方程式についてある程度学び，その知識を携えて力学を学び直す」というものである [1].

現実的には幾つかの理由からそう上手くはいかない．一つの大きな理由は，大学におけるカリキュラムの都合上，微分方程式を学ぶのが力学の後になることが多いことである．他の理由としては，教える者の問題がある．理工系研究者ともなれば「運動方程式が微分方程式である」などということは当然過ぎて，遙か昔にそれを知ったときの感動を若者に伝えようとはしない．

そのようなことを考えている筆者に，県内の優秀な学生に向けて数学や物理の授業をしてみないかという企画が舞い込んできた．そこで，長年温めてきた微分方程式をテーマにした高大接続授業の理想を具現化したのが「ハイレベル数学講座：数学で解く物理の世界」である．

責任著者連絡先：宮本雲平　〒015-0055 由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4　公立大学法人秋田県立大学総合科学教育研究センター.
E-mail: umpei@akita-pu.ac.jp

本稿とその前編（宮本，2021）では，受講生への配付資料に大幅に手を加えることで，ハイレベル数学講座で私が考える高校物理と大学物理のギャップを埋める方法を明らかにしている．これらを高大接続授業や教養物理・教養数学の授業で実際に教材として用いて頂き，地域の基礎学力向上へ役立てて頂くと同時に，フィードバックを頂くことで内容をより充実したものにするのが狙いである．

筆者は，ハイレベル数学講座や大学における物理・数学の講義において，可能な限り次元解析に関する解説をしている．次元解析は，高校 1 年生程度の数学（指数法則）しか使わないが，それを身につけるだけで飛躍的に数理的センスが向上するという魔法のような側面を持っている（青野，1982）．

しかし，高校生で次元解析を（とは言わないまでもそれに近い考え方さえも）身につけている者は皆無に等しい．一方，大学に入学すると「勉強する過程で自然に身につけるもの」として，大して説明もなく使われる．それを正規の授業で学習するのは，物理学・流体工学・機械工学など一部の学問を専攻する者だけのようである．

したがって，次元解析も高大接続授業に最適なテーマである．本稿では，次元解析を高校生に教える具体的な方法と，次元解析を通してよりアドバンスな内容（量子力学や一般相対論）にも触れ，大学物理への興味を促進する方法も紹介している．

運動方程式の役割

力学における運動方程式の役割

ここでは前編（宮本，2021）を振り返っておく．

高校物理で学習するニュートンの運動方程式（質量 × 加速度 = 外力）は，数学的には微分方程式

$$m\ddot{x}(t) = F \tag{1}$$

である．

代表的な場合として，等加速度運動（$F = $ 一定），速度に比例する摩擦力（$F = -k\dot{x}$），単振動（$F = -kx$）などが考えられるが，それらを (1) の右辺に代入し，微分方程式を解けば，時間の関数として位置 $x = x(t)$ が求められる．

また，高校物理では運動方程式とは独立に種々の保存則が成立しているような印象を受けるが，実は全ての保存則は運動方程式を積分することで導かれる．

このように，運動方程式を微分方程式と捉え，積分の知識を用いると，運動方程式から全ての現象や法則が導かれるという物理学の単純さと，自然の美しさを知ることができる（図 1）．

この力学の構造は物理学における還元主義の源であり，その他すべての物理分野の模範になっている．そのことを高校生に理解してもらうため，講座の終盤では力学以外の分野における運動方程式を紹介している．もちろん，全ての意味を理解してもらうことは出来ないが，物理学が徹底した還元主義のもと営まれる学問であり，それが通用するほど自然は美しいことを知ってもらうことが狙いである．

いろいろな運動方程式

【力学】

古典力学（classical mechanics）[2] におけるニュートンの運動方程式は，質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ として

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t), t) \tag{2}$$

のように，本来はベクトル形式で与えられる [3]．

【電磁気学】

電磁気学（electromagnetism）における運動方程式はマクスウェル方程式と呼ばれ，ガウスの法則 (3)，電磁誘導の法則 (4)，磁束密度の沸き出しなしの法則 (5)，マクスウェル・アンペールの法則 (6) と呼ばれる 4 つの微分方程式から構成されている（小宮山ら，2015）．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{6}$$

これらは，与えられた電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ と電流密度分布 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$ に対して，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ を決定するための方程式である．$\frac{\partial}{\partial t}$ は時間微分を表し，$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ は空間微分を表すベクトルである．また，$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_w)$ を 2 つのベクトルとして，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ は内積，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_yb_z - a_zb_y, a_zb_x - a_xb_z, a_xb_y - a_yb_x)$ は外積と呼ばれる積である．ε_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率，真空の透磁率と呼ばれる定数である．

マクスウェル方程式のような 2 つ以上の変数による微分を含む微分方程式は偏微分方程式（partial differential equation）と呼ばれる．それに対して，ニュートンの運動方程式 (2) のような 1 変数による微分だけを含むものを常微分方程式と呼び区別する．

【熱力学】

熱力学（thermodynamics）においては，エネルギー収支を表す熱力学第 1 法則（原島，1978）

$$TdS = dE + PdV \tag{7}$$

が基本的な役割を果たす．ここで，T, S, E, P, V はそれぞれ温度，エントロピー，内部エネルギー，圧力，体積である．dX は熱力学量 X の微少量を表す．

【流体力学】

液体や気体の運動を記述するのが流体力学（fluid mechanics）である．流体の運動方程式は，ナヴィエ・スト一

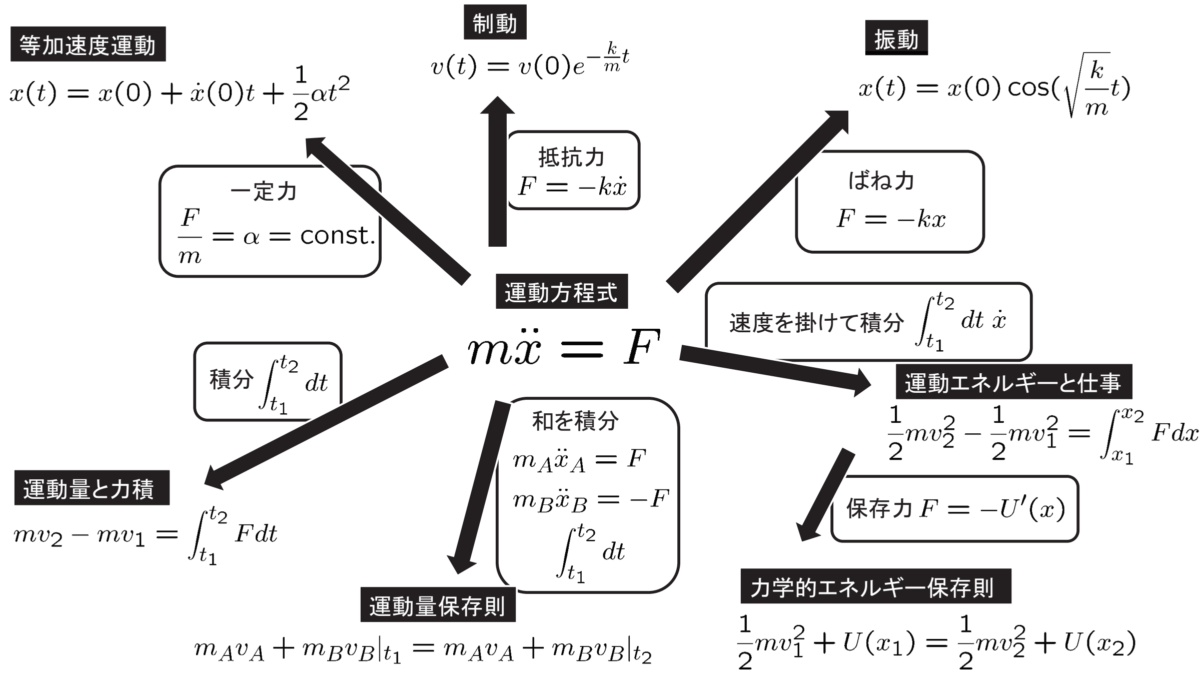

図 1: **宮本（2021）より再掲．運動方程式（$m\ddot{x}(t) = F$）を積分することで，速度 $v(t) = \dot{x}(t)$ や位置 $x(t)$ が時間の関数としてわかる．また，運動方程式を積分することで，運動量とエネルギーに関する保存則が導かれる．**

クス方程式（巽，1995）と呼ばれ，流体の速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ に対する偏微分方程式である．

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v} = -\nabla P + \eta(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{8}$$

ここで，$\rho, P(\boldsymbol{x}, t), \eta$ はそれぞれ流体の密度，圧力，粘性率である．ナヴィエ・ストークス方程式も偏微分方程式であるが，解くことが難しいため，一般的な条件の下で解の存在と滑らかさを証明することは，クレイ数学研究所におけるミレニアム懸賞問題（賞金 100 万ドル）になっている [4]．

【量子力学】

原子レベルのミクロな世界は量子力学（quantum mechanics）で記述される（砂川，1991）．量子力学における運動方程式は，ニュートンの運動方程式 (2) ではなくシュレディンガー方程式 (9) となる．

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\nabla + U(\boldsymbol{x}, t)\right)\psi \tag{9}$$

ここで，$i = \sqrt{-1}$，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$（h はプランク定数）である．シュレディンガー方程式は，質量が m の粒子が，ポテンシャル $U(\boldsymbol{x}, t)$ 中に放たれたとき，その粒子がいつどこにどのような確率で存在するのかを教えてくれる偏微分方程式であり，複素数値をとる波動関数 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ の絶対値の 2 乗 $|\psi(\boldsymbol{x}, t)|^2$ が粒子の確率密度（単位体積当たりの存在確率）を表している．

【一般相対論】

ニュートン力学も重力を記述できるが，強い重力の記述には一般相対論が必要である（内山，1977；佐々木，1996）．一般相対論によれば，重力は時空（時間と空間）の歪みである．したがって，一般相対論における運動方程式であるアインシュタイン方程式 (10) は時空の運動方程式ということになる．

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{10}$$

アインシュタイン・テンソル $G_{\mu\nu}$ は時空の曲率，エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は時空に存在する物質のエネルギー分布を表している．アインシュタイン方程式を解くことで，宇宙は膨張していること，重たい星はやがてブラックホールになること，天体どうしの衝突で重力波が発生することなどがわかる．アインシュタイン方程式 (10) はナヴィエ・ストークス方程式 (8) より遙かに解くのが難しいため，懸賞問題にさえなっていない．

アインシュタイン方程式は偏微分方程式であるが，時空に高い対称性がある場合には常微分方程式になることもある．そのような例として，宇宙全体のダイナミクスを考えてみる．

宇宙空間に x, y, z 座標を張る．点 (x, y, z) とそこから少し離れた点 $(x + dx, y + dy, z + dz)$ の間の物理的距離 ds は

$$ds = a(t)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{11}$$

で与えられることが知られている．t は宇宙が始まってからの時間であり，$a(t)$ が宇宙の大きさを決める時間の関数である．一般相対論（佐々木，1996）によれば，$a(t)$ の運動方程式は次のようになる

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho(t) + 3P(t)) \tag{12}$$

ここで，$\rho(t), P(t)$ は宇宙空間を満たす物質のエネルギー密度と圧力である．この運動方程式を解くと宇宙の大きさの時間発展を知ることができる．

もしも ρ, P が一定ならば，この運動方程式は単振り子の運動方程式 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ と同型（宮本, 2020）であり，$a(0) = 0, \dot{a}(0) \neq 0$ とすれば，$\sin \omega t$ 型の解になることが解る．ただし，実際には時間と共に ρ と P が減少するため，次第に膨張速度は弱まるものの収縮には転じない．

次元解析

次元とは

全ての物理量には，大きさ（magnitude）と次元（dimension）という 2 つの特性が備わっている．例えば，棒の長さとして $\ell_1 = 1\mathrm{m}$ と $\ell_2 = 2\mathrm{m}$ を考える．ℓ_2 の大きさは ℓ_1 の大きさの 2 倍（$\ell_2 = 2\ell_1$）であるが，どちらも長さであることに違いはない．このことを「ℓ_1, ℓ_2 は長さの次元 L をもつ」といい

$$[\ell_1] = [\ell_2] = L \tag{13}$$

と表す．つまり，$[X]$ は物理量 X から大きさの情報を消去し，次元の情報だけを取り出す記号である．

力学に現れる殆どの物理量の次元は，質量（mass）の次元 M，長さ（length）の次元 L，時間（time）の次元 T の組合せで構成される．例えば，エネルギーは運動エネルギーの例からわかるように

$$[\text{エネルギー}] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = ML^2T^{-2} \tag{14}$$

という次元を持つ．

このように，物理量の次元を計算したり，次元をもとに式や現象を考察することを次元解析（dimensional analysis）という．次元解析を身につけると次のようなメリットがある．

(a) 計算間違いを減らせる．
(b) 計算せずに答えを予想できる．

次のような例題を考えると面白い．

例題 3.1
g は重力加速度（$[g] = LT^{-2}$）とする．長さ ℓ の単振り子の周期として正しいものは次のうちどれか．

（ア）$2\pi \frac{\ell}{g}$

（イ）$2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

（ウ）$2\pi \frac{g}{\ell}$

（エ）$2\pi \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

【解答】
問題を解かなくても（公式を忘れても），時間の次元をもつ物理量は（イ）しかないので，答えは（イ）である．□

主な物理量の次元

力学に現れる物理量の次元を求めておく．基本となるのは次の 3 つの次元である．

$$M = [\text{質量}],\ L = [\text{長さ}],\ T = [\text{時間}] \tag{15}$$

力学に現れる他の物理量の次元はこの 3 つの次元の組合せで表すことができる．

$$[\text{速度}] = \left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{L}{T} = LT^{-1} \tag{16}$$

$$[\text{加速度}] = \left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2} \tag{17}$$

微分は割り算になっていることに気を付ける．力の次元は運動方程式からわかる．

$$[\text{力}] = [ma] = MLT^{-2} \tag{18}$$

物理量の次元を覚える必要はないが，どのような関係式を用いれば各々の物理量の次元を求められるかを覚えておくとよい．

運動量の次元は定義から得られる．

$$[\text{運動量}] = [mv] = MLT^{-1} \tag{19}$$

エネルギーは形態を変えて物理のあちこちに現れるが，運動エネルギーを例に考えれば

$$\begin{aligned}[\text{エネルギー}] &= \left[\frac{1}{2}mv^2\right] \\ &= [m][v^2] = ML^2T^{-2}\end{aligned} \tag{20}$$

仕事は（力 $\times$変位）だが，エネルギーと同じ次元をもつ．

$$\begin{aligned}[\text{仕事}] &= \left[\int F dx\right] \\ &= [F][x] = ML^2T^{-2}\end{aligned} \tag{21}$$

角度は無次元である．何故なら，半径が r，弧長が ℓ の扇形の中心角 θ を考えれば

$$[\text{角度 } \theta] = \left[\frac{\ell}{r}\right] = \frac{L}{L} = 1 \tag{22}$$

よって，角速度は時間の逆数の次元をもつ．

$$[\text{角速度 } \omega] = \left[\frac{d\theta}{dt}\right] = \frac{1}{T} = T^{-1} \tag{23}$$

他の物理量については表 1 を参照されたい．

次元解析の主な活用法として，「計算チェック」と「答えの予想」がある．それらについて順に見ていく．いずれの場合についても，守るべきは次の鉄則である．

(a) 1 つの式の全ての項は同じ次元をもつ．
(b) 三角関数や指数関数の引数（$\sin x, e^x$ の x）は無次元である．

表 1: 力学に出てくる物理量・物理定数の次元.

物理量	記号	次元
質量	m	M
変位，長さ	x, s, ℓ	L
時間	t	T
速度	v	LT^{-1}
加速度	a	LT^{-2}
力	F	MLT^{-2}
運動量	mv, p	MLT^{-1}
エネルギー，仕事	$E, \int F dx$	ML^2T^{-2}
力積	$\int F dt$	MLT^{-1}
トルク	N	ML^2T^{-2}
バネ定数	k	MT^{-2}
密度	ρ	ML^{-3}
圧力	P	$ML^{-1}T^{-2}$
角度，位相	θ	1
角速度，角振動数	ω	T^{-1}
周期	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	T
振動数	$f, \nu = \frac{1}{T}$	T^{-1}
振幅	A	L
光速	c	LT^{-1}
万有引力定数	G	$M^{-1}L^3T^{-2}$
重力加速度	$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$	LT^{-2}
プランク定数	h	ML^2T^{-1}

$M_\oplus, R_\oplus$ は地球の質量と半径.

次元解析で検算を

全ての項は同じ次元をもつことの例として，等加速度 α で運動する質点の位置 x に関する次の公式を見てみよう.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{24}$$

ここで，x_0 は初期位置，v_0 は初速度である．右辺の 3 つの項の次元を調べると

$$[x_0] = L \tag{25}$$

$$[v_0 t] = LT^{-1} \cdot T = L \tag{26}$$

$$\left[\frac{1}{2}\alpha t^2\right] = LT^{-2} \cdot T^2 = L \tag{27}$$

全て長さの次元を持つ.

例えば，(24) の右辺において最後の項が $\frac{1}{2}\alpha t$ となっていたら，その項の次元は L にならないので，計算ミスしていることを発見できる．基本的に，次元が合っていても計算が正しいとは言えないが， 次元が間違っていれば，その式は絶対に間違っている（次元が合っていることは式が正しいことの必要条件）ので，各項の次元が同じかどうかを調べることは強力な検算となる.

速度に比例する抵抗力（$F = -k\dot{x}$）を受ける質点の速度は

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \tag{28}$$

となることを前の論文（宮本，2020）で見た．指数関数 e^x の指数 x は定義からして必ず無次元の数である．何故なら，もともと指数関数 a^x というのは，$a^1, a^2, a^3, \cdots$ という a の自然数冪を実数 x に拡張したものだからである．同様に，三角関数 $\sin x$ の x は角度だから無次元である.

したがって，(28) 右辺の指数部分 $-\frac{k}{m}t$ は無次元でなければならない．これを確かめよう．まず，

$$[k] = \left[\frac{力}{速さ}\right] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1} \tag{29}$$

である．これを用いれば

$$\left[-\frac{k}{m}t\right] = \frac{[k][t]}{[m]} = \frac{MT^{-1} \cdot T}{M} = 1 \tag{30}$$

となり，指数部分は実際に無次元であることが確かめられた.

もし，(28) において指数関数の部分が $e^{-t}, e^{-kt}, e^{-t/m}$ などとなっていたら指数が次元をもつからその答えは絶対に間違っている.

次元解析で計算せずに結果を予想

次元解析を用いれば，計算をしないで大凡の結果を知ることができる．例を見ていこう.

【単振り子の周期】

周期（period）を P とすると，P は，おもりの質量 m，重力加速度 g，ひもの長さ ℓ の関数となるはずだから無次元の定数倍を除いて

$$P = m^x g^y \ell^z \tag{31}$$

と書けるはずである（x, y, z は無次元の定数）．右辺の次元を調べる.

$$\begin{aligned}[m^x g^y \ell^z] &= [m]^x [g]^y [\ell]^z \\ &= M^x \cdot (LT^{-2})^y \cdot L^z \\ &= M^x L^{y+z} T^{-2y}\end{aligned} \tag{32}$$

周期は時間の次元 T を持つから

$$M^x L^{y+z} T^{-2y} = T \tag{33}$$

が成立していなくてはならない．M, L, T の指数部分を比較することで，次のような連立方程式を得る.

$$x = 0,\ y + z = 0,\ -2y = 1 \tag{34}$$

この連立方程式を解けば

$$x = 0,\ y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2} \tag{35}$$

よって，周期は定数倍の自由度を除いて

$$P = m^0 g^{-\frac{1}{2}} \ell^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{36}$$

となることがわかった.

【質量とエネルギーの等価性】

アインシュタインは特殊相対論（内山，1977）において，「世界で一番有名な式」$E=mc^2$ を導いた．ここでは，物質はその質量 m と光速 c で決定されるエネルギーをもっていると仮定して，そのエネルギーを次元解析によって決定してみよう．

$$E = m^x c^y \tag{37}$$

と仮定すると

$$\begin{aligned}[E] &= [m^x c^y] = M^x \cdot (LT^{-1})^y \\ &= M^x L^y T^{-y} = ML^2T^{-2}\end{aligned} \tag{38}$$

よって，連立方程式

$$x = 1,\ y = 2,\ -y = -2 \tag{39}$$

を得る．これを解けば

$$x = 1,\ y = 2 \tag{40}$$

したがって

$$E = mc^2 \tag{41}$$

を得る．

特殊相対論における質点の運動方程式（$ma=F$ の相対論バージョン）によれば，速さ v で運動する粒子は

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots \tag{42}$$

のエネルギーを持っている．ただし，最後の等式では v/c が十分小さいとして近似を用いた．

【水素原子の半径】

原子のような極小の粒子を記述する量子力学（砂川，1991）では，プランク定数 h（$[h]=ML^2T^{-1}$）が重要な役割を果たすことが知られている．水素原子を構成する陽子と電子は半径の二乗に反比例する力

$$F = \frac{A}{r^2} \tag{43}$$

を及ぼし合っている．ここで A は，k_0 をクーロン定数，e を素電荷として，$A=k_0e^2$ で与えられる定数である（小宮山ら，2015）．

水素原子の半径 r は電子の質量 m と A, h で決定されるとして，水素原子の半径 r を次元解析によって求めよう．

$$r = m^x A^y h^z \tag{44}$$

とすると

$$\begin{aligned}L = [r] &= [m^x A^y h^z] \\ &= M^x (MLT^{-2}\cdot L^2)^y (ML^2T^{-1})^z \\ &= M^{x+y+z} L^{3y+2z} T^{-2y-z}\end{aligned} \tag{45}$$

よって，次の連立方程式を得る．

$$x+y+z = 0 \tag{46}$$

$$3y+2z = 1 \tag{47}$$

$$-2y-z = 0 \tag{48}$$

これを解いて

$$x = -1,\ y = -1,\ z = 2 \tag{49}$$

となるから

$$r = \frac{h^2}{Am} \tag{50}$$

量子力学における運動方程式であるシュレディンガー方程式 (9) を解けば

$$r = \frac{h^2}{4\pi Am} \simeq 10^{-11}\mathrm{m} \tag{51}$$

となるが，次元解析によって定数倍 $\frac{1}{4\pi}$ を除いて正しい答えが得られた．

【ブラックホールの半径】

アインシュタインは簡単な思考実験から重力は光を曲げるという結論に至った．すると，光さえも脱出することを許さない強い重力をもつブラックホール天体の存在が示唆される（内山，1977）．ブラックホールの半径 R は，ブラックホールの質量 m と定数 c, G に依存するとして次元解析から R を決定しよう．

$$R = c^x G^y m^z \tag{52}$$

とおくと

$$\begin{aligned}L = [R] &= [c^x G^y m^z] \\ &= (LT^{-1})^x (M^{-1}L^3T^{-2})^y M^z \\ &= M^{-y+z} L^{x+3y} T^{-x-2y}\end{aligned} \tag{53}$$

より，連立方程式

$$-y+z = 0 \tag{54}$$

$$x+3y = 1 \tag{55}$$

$$-x-2y = 0 \tag{56}$$

を得る．これを解くと

$$x = -2,\ y = 1,\ z = 1 \tag{57}$$

となるので

$$R = \frac{Gm}{c^2} \tag{58}$$

実際に，ブラックホールの運動方程式であるアインシュタイン方程式 (10) を解くと（内山，1977）

$$R = \frac{2Gm}{c^2} \tag{59}$$

が導かれるので，定数倍 2 を除いて次元解析により正しい答えが得られたことになる．m として太陽の質量 $M_\odot$ をとると $R \simeq 3\mathrm{km}$ となる．これは太陽の半径が 3km まで縮まればブラックホールになることを表している．

演習問題

問題 3.1

質量 m の質点がバネ定数 k のバネに繋がれ振動するときの周期を次元解析から求めよ．

【解答】

周期を

$$P = m^x k^y \tag{60}$$

とおくと，これが時間の次元をもたなければならないから

$$\begin{aligned}[m^x k^y] &= M^x \cdot \left(\frac{MLT^{-2}}{L}\right)^y \\ &= M^{x+y} T^{-2y} = T \end{aligned} \tag{61}$$

指数部分を比較することで，次のような連立方程式を得る．

$$x + y = 0,\ -2y = 1 \tag{62}$$

この連立方程式を解けば

$$x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2} \tag{63}$$

よって

$$P = \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{64}$$

□

問題 3.2

質量 m の質点を上空から落下させる．質点が速さに比例する抵抗と重力を受けながら運動するとき，$t \to +\infty$ における速度（終端速度）を次元解析から求めよ．ただし，抵抗力の比例定数を k とする．

【解答】

終端速度を

$$v_\infty = m^x g^y k^z \tag{65}$$

とおくと，v_∞ の次元が LT^{-1} である必要があるので

$$\begin{aligned} LT^{-1} &= [v_\infty] \\ &= [m^x g^y k^z] = M^x (LT^{-2})^y \left(\frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}}\right)^z \\ &= M^{x+z} L^y T^{-2y-z} \end{aligned} \tag{66}$$

指数を比較して

$$x + z = 0,\ y = 1,\ -2y - z = -1 \tag{67}$$

この連立方程式を解くと

$$x = 1,\ y = 1,\ z = -1 \tag{68}$$

したがって

$$v_\infty = \frac{mg}{k} \tag{69}$$

これは，係数を含めて正しい（宮本，2020）．

□

結び

筆者が秀才でなかったからかも知れないが，運動方程式が微分方程式であるということや，次元解析の考え方を知ったときの感動を今だに忘れることができない．そして，それらを高校生・大学新入生に伝えれば必ず感動を与えられると考えている．

事実，筆者の同業者（理論物理学者）には，高校生のとき，課外授業で物理の先生が微分積分を使った物理を教えてくれ，それが切っ掛けで物理の面白さに目覚め，物理学者を目指したという人が複数いる．つまり，ある程度の学力・意欲をもつ高校生ならば，それらを理解し，強烈な感動を味わうことが出来るのである．

秋田県には，高い学力と意欲を持ちながらも，決して恵まれているとは言えない教育環境に身を置く者が沢山いる．今後も，数学や物理学に関して効果的な高大接続授業の研究が望まれる．

謝辞

毎年「ハイレベル数学講座」の開講に協力して下さる秋田県立大学の教職員の皆様に感謝します．特に，講座の立ち上げから現在まで，様々なご意見・アドバイスを下さった宮崎悟先生に感謝します．また，講座に参加し数々の有益なフィードバックを下さった高校生の皆様に感謝します．

参考文献

青野修（1982）.『次元と次元解析』共立出版

内山龍雄（1977）.『一般相対性理論』岩波書店

大矢雅則ほか（2016）.『改訂版　新編　数学 III』数研出版

國友正和ほか（2012）.『物理』数研出版

小宮山進，竹川敦（2015）.『マクスウェル方程式から始める電磁気学』裳華房

佐々木節（1996）.『一般相対論』産業図書

砂川重信（1991）.『量子力学』岩波書店

巽友正（1995）.『連続体の力学』岩波書店

Chandrasekhar, S.(著), 中村誠太郎 (監訳)（1998）.『チャンドラセカールの「プリンキピア」講義』講談社

原島彰（1978）.『熱力学・統計力学』培風館

兵頭俊夫（2001）.『考える力学』学術図書出版

宮本雲平（2021）.「微分方程式と次元解析をテーマとした物理の高大接続授業 I」,『総合科学研究彙報』, 22 号, 7–21 ページ

矢野健太郎，石原繁（1965）.『解析学概論（新版）』裳華房

山本義隆（2004）.『新・物理入門　増補改訂版』駿台文庫

注

[1]1996 年までは高校数学（現在の「数学 III」（大矢ほか, 2016））に微分方程式の単元があったことは注目に値する．
[2] 対象とする系の量子論的性質を考慮していない物理学を古典物理と呼ぶ．その点を強調したいとき力学を古典力学という．ここで紹介する物理学分野は，量子力学以外は全て古典物理である．
[3] 大学ではベクトルを矢印 $\vec{a}$ ではなく，太字 $\boldsymbol{a}$ で表す．
[4] クレイ数学研究所のウェブサイトに正式な問題の記述が掲載されている：http://www.claymath.org/millennium-problems/navier-stokes-equation

令和 3 年 7 月 30 日受付
令和 3 年 9 月 1 日受理

High School/University Articulation Course of Physics on Differential Equations and Dimensional Analysis II

Umpei Miyamoto

Research and Education Center for Comprehensive Science, Akita Prefectural University

Since 2015, I have been conducting a series of lectures titled "Advanced Lectures on Mathematics: Solving Physics Using Mathematics" for high school students in Akita prefecture. These lectures are to help students understand that mathematics considerably reduces the number of formulas in physics to be memorized, and the simplicity and beauty of nature. The importance of achieving the above objectives and a practical method for understanding Newton's equations of motion as ordinary differential equations using only the mathematical knowledge taught in high school were introduced in the previous paper (Miyamoto, 2021). In this paper, I propose a practical technique for teaching high school students the equations of motion in physics other than Newtonian mechanics, and the concept of dimensional analysis.

Keywords: High schools in Akita prefecture, mathematics

Correspondence to: Umpei Miyamoto, Research and Education Center for Comprehensive Science, Akita Prefectural University, 84-4 Ebinokuchi, Yurihonjo, Akita 015-0055, Japan. E-mail: umpei@akita-pu.ac.jp